Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).
Tisdagen den 5 juni 2007, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.
Uppgifterna: 1- 9 ger maximalt 4p vardera

1. Lös samt ange maximalt lösningsintervall till begynnelsevärdesproblemet $xy' - y^2 = y,\ y(1) = 3$.
Lösning:
Differentialekvationen är separabel. (Även av Bernoulli typ.)
Vi omformar: $xy' = y^2 + y$.
De två konstantlösningarna $y = 0$ och $y = -1$ uppfyller ej villkoret.
Då $y \neq 0$ och $y \neq -1$ kan differentialekvationen skrivas: $\frac{1}{y^2 + y} y' = \frac{1}{x}$.

Vi partialbråksuppdelar och får då följande uttryck: $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) y' = \frac{1}{x}$.

Integration map x : $\ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|C_1 x|$, $\frac{y}{y+1} = \pm C_1 x = Cx$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret $y(1) = 3$ ger $C = \frac{3}{4}$.

Sätt in konstanten i ekvationen och lös ut den sökta lösningen.
Vi får: $4y = 3x(y+1)$, $y = \frac{3x}{4 - 3x}$ där $4 - 3x \neq 0$.

Villkoret $4 - 3x \neq 0$ ger att det finns två möjliga intervall: $\left\{ x : x < \frac{4}{3} \right\}$ eller $\left\{ x : x > \frac{4}{3} \right\}$.

Begynnelsevillkoret, $y(1) = 3$, ger att det aktuella intervallet är $\left\{ x : x < \frac{4}{3} \right\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{3x}{4 - 3x}$ och dess maximala lösningsintervall är $\left\{ x : x < \frac{4}{3} \right\}$.

2. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ samt ange den allmänna lösningen.

Lösning:
Vi bestämmer först matrisens egenvärden och egenvektorer.
Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Insättning ger: $0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1$, $(2+\lambda)^2 = 1$, $\lambda = -2 \pm 1$.
Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$.
Motsvarande egenvektorer, $\mathbf{K}$, erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.
Insättning av $\lambda_1 = -1$ ger: $\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{pmatrix} \mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, en egenvektor $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Insättning av $\lambda_2 = -3$ ger: $\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -2+3 \end{pmatrix} \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, en egenvektor $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
En fundamentalmatris, Φ, består av de linjärt oberoende lösningarna till systemet.

Vi får $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$. Vi kontrollerar att dess determinant är skild ifrån noll.

Detta för att säkerställa att de angivna lösningarna är linjärt oberoende. $\det \Phi = -2e^{-4t} \neq 0$.
Den allmänna lösningen kan skrivas $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är en konstant kolonnvektor.

SVAR: En fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

3. En kaka tas ur ugnen. Efter 10 minuter är kakan 105°C och efter 30 minuter är kakan 65°C. Vid vilken tidpunkt, kaktemperaturen är då 35°C, kan en smakbit erhållas ?
Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$, där T_0 är rumstemperaturen 25°C och T är kakans temperatur i °C.
Lösning:
Avsvalningsprocessen följer differentialekvationen $\frac{dT}{dt} = k(T - 25)$. Den allmänna lösningen erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $T = Ce^{kt} + 25$. Nu över till den lösning som uppfyller villkoren.
$T(10) = 105$ ger $80 = Ce^{10k}$.
$T(30) = 65$ ger $40 = Ce^{30k}$.
Ledvis division ger $2 = e^{-20k}$ vilket kan skrivas $k = -\frac{1}{20}\ln 2$.
Insättning ger $C = 80e^{-10\left(-\frac{1}{20}\ln 2\right)} = 80e^{\ln 2^{\frac{1}{2}}} = 80\cdot 2^{\frac{1}{2}}$.
Kaktemperaturen, T, vid en godtycklig tidpunkt, t, är $T = 80\cdot 2^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{20}\ln 2} + 25 = 80\cdot 2^{\frac{10-t}{20}} + 25$.
$T = 35$ ger $35 = 80\cdot 2^{\frac{10-t}{20}} + 25$, $2^{\frac{10-t}{20}} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, $\frac{10-t}{20} = -3$, $t = 70$.
SVAR: Kaktemperaturen är 35°C efter 70 minuter.

4. Lös för $t \geq 0$ begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 13y = e^{-2t}\cos 3t$, $y(0) = y'(0) = 0$.
Lösning:
Vi Laplacetransformerar: $s^2Y(s) + 4sY(s) + 13Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \frac{s+2}{((s+2)^2 + 3^2)^2}$.

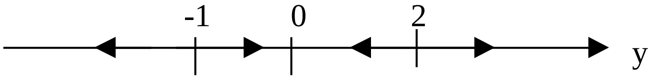
Vid återtransformationen observerar vi att $L^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}L^{-1}\{F(s)\}$.

Vi får då: $L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{((s+2)^2 + 3^2)^2}\right\} = e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{s}{((s)^2 + 3^2)^2}\right\} = e^{-2t}\frac{t\sin 3t}{2\cdot 3}$.

SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning ges av $y(t) = e^{-2t}\frac{t\sin 3t}{6}$.

5. Betrakta differentialekvationen $y' = y(y+1)(y-2)$.
Bestäm de stationära lösningarna och avgör lösningarnas stabilitet/instabilitet.
Lösning:
Vi bestämmer först de stationära lösningarna, vilka erhålles då derivatan är lika med noll.

De stationära lösningarna är $y_1 = 0$, $y_2 = -1$ och $y_3 = 2$.
Därefter studerar vi derivatans tecken.
För $y > 2$ är $y' > 0$ och y är där en växande funktion. Se figur.
Analogt för resten av reella axeln. Uppförandet är markerat i figuren.



Den stationära lösningen $y_1 = 0$ är asymptotiskt stabil.
De stationära lösningarna $y_2 = -1$ och $y_3 = 2$ är instabila.
SVAR: Den stationära lösningen $y_1 = 0$ är asymptotiskt stabil.
De stationära lösningarna $y_2 = -1$ och $y_3 = 2$ är instabila.

6. En lösning till differentialekvationen $ty'' - (1+t)y' + y = 0$, $t > 0$ ges av $y = e^t$.
Bestäm en bas för differentialekvationens lösningsrum samt ange den allmänna lösningen.
Lösning:
En bas för differentialekvationens lösningsrum består av de linjärt oberoende lösningarna.
Vi bestämmer först en av den givna lösningen linjärt oberoende lösning.
Vi använder reduktion av ordning. Detta innebär att vi sätter $y = e^t z$.
Insättning i differentialekvationen ger: $t\{e^t z'' + 2e^t z' + e^t z\} - (1+t)\{e^t z' + e^t z\} + e^t z = 0$.
Förenkla: $t\{z'' + 2z' + z\} - (1+t)\{z' + z\} + z = 0$, $tz'' + (t-1)z' = 0$.
Sätt: $u = z'$, $u' = z''$. Vi får då $tu' + (t-1)u = 0$, vilken är separabel.
Omformning ger: $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1-t}{t} = \dfrac{1}{t} - 1$. Vi söker en lösning.
Integration map t : $\ln|u| = \ln t - t$, $u = \pm te^{-t}$. En lösning sökes, tag $u = te^{-t}$, $z' = te^{-t}$.
Partiell integration ger: $z = -te^{-t} - e^{-t}$. Vi får då $y = e^t(-te^{-t} - e^{-t}) = -t - 1$.
Även $y = t + 1$ är en lösning. Vi undersöker det linjära oberoendet och använder då
Wronskian, vilken skall vara skild ifrån noll. $W(e^t, t+1) = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = -te^t < 0$ då $t > 0$.
De två funktionerna, $y = e^t$ och $y = t + 1$, är linjärt oberoende och bildar en bas för lösningsrummet till den givna differentialekvationen.
Den allmänna lösningen erhålles som en godtycklig linjärkombination av basfunktionerna.
Vi får således $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.
SVAR: En bas för differentialekvationens lösningsrum är $\{e^t, t+1\}$ och den allmänna lösningen ges av $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$.

7. Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $u'_x - u'_y = u$
som uppfyller villkoret $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x}$.
Lösning:
Vi använder variabelseparation.
Insättning av $u(x,y) = X(x)Y(y)$ i differentialekvationen: $X'(x)Y(y) - X(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$.
Dividera med $X(x)Y(y)$: $\dfrac{X'(x)}{X(x)} - \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} = 1$, $\dfrac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} =$ konstant $= \lambda$.
Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

Vi får $\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}$ och detta system har lösningen $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$.

Den partiella differentialekvationen har lösningar på formen
$u(x,y) = X(x)Y(y) = ABe^{\lambda x + (\lambda-1)y} = Ce^{\lambda x + (\lambda-1)y}$.
Även linjärkombinationer är lösningar : $u(x,y) = C_1e^{\lambda x + (\lambda-1)y} + C_2e^{\lambda x + (\lambda-1)y}$.
Villkoret $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x}$ ger $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x} = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{\lambda x}$.
Identifiering ger: $\begin{cases} C_1 = 5 \;,\; \lambda_1 = -4 \\ C_2 = 3 \;,\; \lambda_2 = -2 \end{cases}$. Insättning ger: $u(x,y) = 5e^{-4x-5y} + 3e^{-2x-3y}$.
SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 5e^{-4x-5y} + 3e^{-2x-3y}$.

8. I ett tabellverk står att $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$ är lika med $\frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$, då $0 < x < 1$.
Beräkna $s(-8/3)$.
Lösning:
Den givna serien är en Fourierserie för en jämn funktion $f(x)$, med perioden 2, dvs $f(x+2) = f(x)$.
Vidare gäller att $f(x) = \frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$, då $0 < x < 1$.
Vi utnyttjar funktionens egenskaper.
$f(-8/3) = f(-2 - 2/3) = \{f$ är periodisk med perioden $2\} = f(-2/3) = \{f$ är jämn$\} = f(2/3)$
Vi får då: $s(-8/3) = f(-8/3) = f(2/3) = \frac{\pi^2}{12}\left(3\left(2/3\right)^2 - 6\;2/3 + 2\right) = \frac{\pi^2}{36}(4 - 12 + 6) = -\frac{\pi^2}{18}$.
SVAR: Den sökta seriesumman är $s(-8/3) = -\frac{\pi^2}{18}$.

9. Studera systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.
Lösning:
Vi startar med att bestämma var tangentvektorn är lika med noll.
Detta ger oss de kritiska(stationära) punkterna.
Därefter studerar vi de kritiska punkternas karaktär genom att undersöka Taylorutvecklingen kring aktuell kritisk punkt, med andra ord en linjarisering. Jacobimatrisen blir då ett viktigt redskap.
Tangentvektorn lika med noll ger: $\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$, $\begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (-1,0) \end{cases}$ Två kritiska punkter.
Jacobimatrisen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x & \frac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$
Insättning av respektive kritisk punkt ger:

$(x,y) = (0,0)$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har komplexa egenvärden med positiv realdel.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$.

Dessa är $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

$(x,y) = (-1,0)$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har skilda egenvärden och olika tecken.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$.

Dessa är $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är (0,0) och (-1,0.

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.