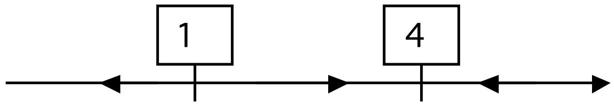
Tentamensskrivning i Diff & Trans I, LV, 5B1220.
Lördagen den 30 oktober 2004, kl 0900-1400.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 trepoängsuppgifter. För godkänt krävs minst 16 poäng.
OBS!
GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS FRÅN VÅRENS REPETITIONSKURS SAMT TILLHÖRANDE OMTENTAMEN HÖSTEN 2004.
OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänt modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...7.

Del1.

1. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.
Lösning:
Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.
Då erhålles $\frac{dP}{dt} = (5 - P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P - 1)(4 - P)$.
Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.
I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.
Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1,\ P = 4$.
Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen P_0 : $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0,\ t \to \infty \end{cases}$.

SVAR: $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0,\ t \to \infty \end{cases}$.

2. Öl som innehåller 6% alkohol per liter pumpas in i ett fat, vilket innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Bestäm mängden alkohol i tanken efter 100 minuter.
När är tanken tom?
Lösning:
Låt $A(t)$ vara mängden alkohol i tanken vid tidpunkten t.
Följande differentialekvation erhålles: $\frac{dA}{dt} = 0.06\cdot 3 - \frac{A(t)}{400 - (4-3)\cdot t}\cdot 4,\ A(0) = 0.03\cdot 400 = 12$.

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses med integrerande faktor.

$\frac{dA}{dt}+\frac{4A(t)}{400-t}=0.18$, multiplicera med $(400-t)^{-4}$. Vi erhåller efter hyfsning:

$\frac{d}{dt}(A(400-t)^{-4})=0.18(400-t)^{-4}$. Integrera map t $A(400-t)^{-4}=0.06(400-t)^{-3}+C$.

Villkoret $A(0)=12$ ger

$C=12(400)^{-4}-0.06(400)^{-3}=(400)^{-4}(12-0.06(400))=-12(400)^{-4}$.

Detta ger: $A(t)=0.06(400-t)-12(400)^{-4}(400-t)^4$.

Mängden alkohol efter 100 minuter är

$A(100)=0.06(300)-12(400)^{-4}(300)^4=18-12(3/4)^4=\frac{909}{64}$.

Tanken är tom efter 400 minuter.

SVAR: Mängden alkohol efter 100 minuter är 909/64. Tanken är tom efter 400 minuter.

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''+9y=\frac{36}{\sin 3x}\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{3}\ .$$

Lösning:

Den allmänna lösningen består av allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.

Den allmänna homogena lösningen är $y_h=A\cos 3x+B\sin 3x$.

För att erhålla en partikulärlösning användes metoden variation av parametrar.

Vi ansätter $y=u(x)\cos 3x+v(x)\sin 3x$.

Variation av parametrar ger oss följande system:

$$\begin{pmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{36}{\sin 3x}\end{pmatrix}$$

Lös ut u' och v'.

$$u'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin 3x\\ \frac{36}{\sin 3x} & 3\cos 3x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}}=\frac{-36}{3}=-12\ ,\ v'=\frac{\begin{vmatrix}\cos 3x & 0\\ -3\sin 3x & \frac{36}{\sin 3x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}}=\frac{36\cos 3x}{3\sin 3x}=4\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}\ .$$

Integration ger $u=-12x$ och $v=4\ln|\sin 3x|$.

Partikulärlösningen blir $y_p=-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

Den allmänna lösningen är $y=A\cos 3x+B\sin 3x-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

SVAR: $y=A\cos 3x+B\sin 3x-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+5y=5U(t-3)$ som uppfyller villkoren $y(0)=1$ och $y'(0)=3$. Här är $U(t-3)$ Heavisides stegfunktion.

Lösning:

Laplacetransformera:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2(sY(s)-y(0))+5Y(s)=\frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$(s^2+2s+5)Y(s)=s+3+2+\frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$Y(s)=\frac{s+5}{s^2+2s+5}+\frac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s}=\frac{s+1+4}{(s+1)^2+4}+\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)e^{-3s}$$

Återtransformera:

$$y(t)=e^{-t}\{\cos 2t+2\sin 2t\}+U(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3)+\frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

SVAR:

$$y(t)=e^{-t}\{\cos 2t+2\sin 2t\}+U(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3)+\frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

<u>5.</u> Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?

Lösning:

Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -5\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1)^2+4$.

Egenvärdena är $\lambda=-1\pm 2i$.

Vi bestämmer nu en egenvektor till egenvärdet $\lambda=-1+2i$.

Insättning av $\lambda=-1+2i$ i systemet $\begin{pmatrix}-2-\lambda & -5\\ 1 & 0-\lambda\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix}-1-2i & -5\\ 1 & 1-2i\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En komplex lösning är $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1-2i\\ -1\end{pmatrix}$

En komplex lösning till systemet av differentialekvationer ges av

$$\mathbf{Z}=e^{(-1+2i)t}\begin{pmatrix}1-2i\\ -1\end{pmatrix}=e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}\right).$$

Real- och imaginärdel ger oss två linjärt oberoende reella lösningar till systemet.

$$\operatorname{Re}\mathbf{Z}=e^{-t}\left(\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\sin 2t\\ 0\end{pmatrix}\right)=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2\sin 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\mathbf{Z}=e^{-t}\left(\begin{pmatrix}\sin 2t\\ -\sin 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\cos 2t\\ 0\end{pmatrix}\right)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t-2\cos 2t\\ -\sin 2t\end{pmatrix}$$

Linjärkombinationer av dessa två lösningar ger den allmänna lösningen.

$$\mathbf{X}=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2\sin 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t-2\cos 2t\\ -\sin 2t\end{pmatrix}.$$

En partikel placerad i punkten (3,4) kommer efter lång tid att hamna i origo,
ty komplexa egenvärden med negativ realdel ger en inåtgående spiral.

SVAR: $\mathbf{X}=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2\sin 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t-2\cos 2t\\ -\sin 2t\end{pmatrix}$. Partikeln hamnar i origo.

<u>6.</u> Bestäm villkor på den reella konstanten α så att (0,0) är en centrumpunkt för det linjära systemet

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ -1 & -\alpha\end{pmatrix}\mathbf{X} .$$

Lösning:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden.

Ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & 1\\ -1 & -\alpha-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\alpha^2+1$ ger oss $\lambda=\pm\sqrt{\alpha^2-1}$.

För att erhålla en centrumpunkt krävs att egenvärdena är rent imaginära.

Det ger att $\alpha^2-1<0$, $-1<\alpha<1$.

SVAR: Konstanten α skall uppfylla villkoret $-1 < \alpha < 1$.

7. Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$

och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

Lösning:

Variabelseparation ger oss produktlösningar men vi utnyttjar BETA.

Den lösning till differentialekvationen och randvillkoren ges enligt BETA 10.9.Ex2 av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

Begynnelsevillkoret ger $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$.

En direkt identifiering ger $c_3 = 2$, $c_4 = 7$, $c_7 = 1$ och övriga $c_n = 0$.

Vi får $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

8.

Skriv differentialekvationen $x'' + x' + x^2 = 1$ som ett första ordningens system.

Bestäm därefter de kritiska punkterna och deras typ och stabilitet/instabilitet.

Lösning:

Vi sätter $y = x'$ och erhåller då $y' = x'' = 1 - x' - x^2$.

Vårt system kan skrivas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 1 - y - x^2 \end{pmatrix}$.

I de kritiska punkterna är tangentvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

De kritiska punkterna är (1,0) och (-1,0).

Deras karaktär studeras genom att linjarisera systemet och därvid beräknas Jacobimatrisen i de aktuella punkterna. Matrisens egenvärden blir avgörande för typ och stabiliet/instabilitet.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$.

Punkten (1,0) ger matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Dess egenvärden beräknas.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$.

Egenvärdena är $\lambda = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, dvs komplexa egenvärden med negativ realdel.

(1,0) är en stabil spiral.

Punkten (-1,0) ger matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dess egenvärden beräknas.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, dvs reella egenvärden med skilda tecken.

(-1,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.

Motsvarande slutsatser kan dras för det icke-linjära systemet.

SVAR: (1,0) är en stabil spiral. (-1,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.