KTH Matematik

Tentamensskrivning i Diff & Trans I, LV, 5B1220.
Lördagen den 30 oktober 2004, kl 0900-1400.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 trepoängsuppgifter. För godkänt krävs minst 16 poäng.
OBS!
GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS FRÅN VÅRENS REPETITIONSKURS SAMT TILLHÖRANDE OMTENTAMEN HÖSTEN 2004.
OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänt modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...7.

Del1.

1. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.
Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.

2. Öl som innehåller 6% alkohol per liter pumpas in i ett fat, vilket innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Bestäm mängden alkohol i tanken efter 100 minuter.
När är tanken tom?

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 9y = \frac{36}{\sin 3x} \ , \ 0 < x < \frac{\pi}{3} \ .$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 5U(t - 3)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$. Här är $U(t - 3)$ Heavisides stegfunktion.

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.
Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?

6. Bestäm villkor på den reella konstanten α så att (0,0) är en centrumpunkt för det linjära systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{X} \ .$$

7. Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$
som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$
och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

8.
Skriv differentialekvationen $x'' + x' + x^2 = 1$ som ett första ordningens system.
Bestäm därefter de kritiska punkterna och deras typ och stabilitet/instabilitet.