Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

**Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen
5B1201 och 5B1216 i Komplex Analys
05-08-26, klockan 09:00–12:00.**

Tal 1.

$$I := \int_{|z+2-2i|=2} \frac{1}{z^2+4z+5}\, dz = \int_{|z+2-2i|=2} \frac{1}{(z+2-i)(z+2+i)}\, dz.$$

Funktionen $(z^2+4z+5)^{-1}$ har en pol av ordning 1 i punkten $z=-2+i$ som ligger innanför $\{z : |z+2-2i|=2\}$. Därför ger residysatsen

$$\int_{|z+2-2i|=2} \frac{1}{(z+2-i)(z+2+i)}\, dz = 2\pi i \Big\{\frac{1}{z+2+i}\Big\}_{z=-2+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

Svar: $I=\pi$.

Tal 2.

$$\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{2iz}\Big(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\Big) = \frac{1}{2iz}\Big(\frac{1}{-i(1+iz)} - \frac{1}{i(1-iz)}\Big)$$

$$= \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^n + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(i)^n z^n = \sum_{k=0}^{\infty}(i)^{2k} z^{2k-1}.$$

Svar:

$$\frac{1}{z(1+z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(i)^{2k} z^{2k-1}.$$

Konvergensradien är lika med 1.

Tal 3.
Låt $f(z) = 5z^4 + z^3 + z^2 - 7z + 14$, $f(z) = h(z) + g(z)$, där $h(z) = 5z^4$ och $g(z) = z^3 + z^2 - 7z + 14$. Antag att $|z| = 3$, då

$$|h(z)| = 5 \times 81 = 405 > 71 = 27 + 9 + 21 + 14 > |z^3 + z^2 - 7z + 14| = |g(z)|.$$

Rouches sats ger då att $f(z) = h(z) + g(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ innanför $\{z : |z| = 3\}$, dvs fem nollställen. Därför alla nollställen ligger inuti cirkeln $C = \{z : |z| = 3\}$.

Tal 4.
a. Man först avbildar kvoten $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ till $\{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| \geq 1\}$ sådan att

$$w_1(z) = \frac{1}{z}.$$

b.

$$w_2 = 2w_1 = \frac{2}{z}$$

avbildar $\{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| \geq 1\}$ till $\{w_2 \in \mathbb{C} : |w_2| \geq 2\}$.
c.

$$w = w_2 + i = 2w_1 = \frac{2}{z} + i$$

avbildar $\{w_2 \in \mathbb{C} : |w_2| \geq 2\}$ till $\{w \in \mathbb{C} : |w - i| \geq 2\}$.
Svar: $w = \frac{2}{z} + i$.