

Lösningar till Tentamen i 5B1201 Komplex analys den 7 juni 2007

1.

För vilka (x, y) är funktionen $v(x, y) = x^3y - y^3x - x^2 + y^2 + x$ harmonisk?
Finn alla funktioner $u(x, y)$ sådana att $u + iv$ är analytisk.

Svar: Vi deriverar och ser att $\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 = 6xy - 6xy + 2 - 2 = 0$, dvs v är harmonisk i hela planet. Om $u + iv$ ska vara analytisk måste den uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer. Speciellt måste $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y = x^3 - 3y^2x + 2y$ vilket betyder att $u = x^4/4 - 3x^2y^2/2 + 2xy + C(y)$. Efter derivering med avseende på y och användning av att $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ fås att $C(y) = y^4/4 - y + C$ för någon konstant C och följaktligen måste

$$u(x, y) = x^4/4 - 3x^2y^2/2 + 2xy + y^4/4 - y + C$$

2.

Beräkna integralen $\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 2)^2} dz$, där γ är cirkeln $|z - 3| = 3/2$ tagen ett varv i positiv led.

Svar: Integranden har en singulär punkt innanför kurvan nämligen $z = 2$. Residyn i denna punkt är

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{z^2 + 1} = \frac{4}{25}.$$

Enligt residysatsen kan integralen då beräknas till $2\pi i \cdot 4/25 = 8\pi i/25$.

3.

Hur många lösningar har ekvationen $e^z = 3z^2$ då $|z| < 1$?

För $|z| = 1$ gäller att $|e^z| \leq e < 3 = |3z^2|$ varför enligt Rouches sats $3z^2$ och $3z^2 - e^z$ har lika många nollställen innanför kurvan $|z| = 1$. Antalet nollställen till $3z^2$ är två så det måste då också vara antalet nollställen till $3z^2 - e^z$.

4.

Avgör om det är sant att $f(z) = \frac{i-z}{i+z}$ är en Möbiusavbildning (boken: “bilinear transformation”) som avbildar det inre av enhetscirkeln på högra halvplanet.

Vi ser att f är en Möbiusavbildning. Vi ser vidare att $f(i) = 0$, $f(-i) = \infty$, $f(1) = i$. Eftersom Möbiusavbildningar tar klassen av cirklar och linjer till cirklar och linjer betyder detta att f avbildar enhetscirkeln på imaginära axeln. Eftersom vidare $f(0) = 1$ så måste f avbilda det inre av enhetscirkeln på högra halvplanet.