

Lösningsförslag till **TENTAMENSSKRIVNING**

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1
FREDAGEN DEN 18 MARS 2005, KL 8.00–13.00

1. Vi skriver om differentialekvationen som

$$y' + (\cos x)y = 2e^{\sin x} \cos x.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\sin x}$ leder till

$$e^{\sin x} y' + e^{\sin x} (\cos x)y = 2e^{2\sin x} \cos x$$

vilket ger

$$\frac{d}{dx}(e^{\sin x} y) = 2e^{2\sin x} \cos x.$$

Integration ger

$$e^{\sin x} y = e^{2\sin x} + C$$

och man får

$$y = e^{\sin x} + Ce^{-\sin x}.$$

Villkoret $y(0) = 3$ ger $3 = 1 + C$, d v s $C = 2$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet blir

$$y = e^{\sin x} + 2e^{-\sin x}.$$

2. Sök egenvärden till systemmatrisen:

$$\begin{vmatrix} 2-m & 5 \\ 4 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad m^2 - 5m - 14 = 0$$
$$m = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} \quad \text{ger} \quad m_1 = 7, \quad m_2 = -2.$$

$m_1 = 7$ ger $(2-7)A + 5B = 0$, d v s $A = B$. En lösning är $A_1 = B_1 = 1$. $m_2 = -2$ ger $(2+2)A + 5B = 0$, d v s $4A + 5B = 0$. En lösning är

$$\begin{cases} A_2 = 5 \\ B_2 = -4. \end{cases}$$

Matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ har alltså egenvärden 7 och -2 med egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Härav följer att den allmänna lösningen till systemet är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d v s

$$\begin{cases} x = c_1 e^{7t} + 5c_2 e^{-2t} \\ y = c_1 e^{7t} - 4c_2 e^{-2t}. \end{cases}$$

3. Låt $f(x, y) = x^2 + x|y|^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{2}} \sin y^2$ vara definierad i en omgivning av $x = 1$, $y = 0$. Man får

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}}|y|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}(\cos y^2)2y, & y \geq 0 \\ -x^{\frac{4}{3}}|y|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}(\cos y^2)2y, & y < 0 \end{cases}$$

och härav följer att f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga. Enligt Picards existenssats finns då $h > 0$ så att problemet

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

har en unik lösning på intervallet $(1 - h, 1 + h)$.

4. Finn kritiska punkter:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ger} \quad x = y \text{ och } 5x^2 = 5 \quad \text{d v s} \quad x = \pm 1.$$

De kritiska punkterna är $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

$(1, 1)$ Sätt

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1. \end{cases}$$

Systemet övergår till

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = 3(u + 1)^2 + 2(v + 1)^2 - 5 = 6u + 4v + 3u^2 + 2v^2 \end{cases}$$

med kritisk punkt $(0, 0)$. Linearisering ger

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = 6u + 4v. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - m & -1 \\ 6 & 4 - m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad m^2 - 5m + 10 = 0$$

och man får

$$m = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 10}.$$

Härav följer att $\operatorname{Re} m > 0$, vilket medför att den kritiska punkten är instabil.

$(-1, -1)$ Sätt

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y + 1. \end{cases}$$

Systemet övergår till

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = -6u - 4v + 3u^2 + 2v^2 \end{cases}$$

med kritisk punkt $(0, 0)$. Linearisering ger

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = -6u - 4v. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - m & -1 \\ 6 & -4 - m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad m^2 + 3m - 10 = 0$$

och man får

$$m = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = 2 \text{ eller } -5.$$

Den ena roten är positiv, vilket medför att den kritiska punkten är instabil.

Både $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ är instabila kritiska punkter.

5. Vi löser problemet med Laplacetransformering. Vi har

$$\mathcal{L}(\cos(3t)) = \frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{och} \quad \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s + 1}.$$

Insättning i den givna ekvationen ger

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(\cos(3t)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-\tau} f(t - \tau) d\tau\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + 9} + \mathcal{L}(e^{-t})\mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{s + 1}\mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

ty Laplacetransformen av en faltning är produkten av de båda enskilda Laplace-transformerna. Härav följer

$$\left(1 - \frac{1}{s + 1}\right)\mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

och man får

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s + 1}{s^2 + 9} = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{s^2 + 9}.$$

Invers Laplacetransformering ger

$$f(t) = \cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t).$$

6. Wronskideterminanten definieras som

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

I punkten $x = 1$ är $W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. W uppfyller differentialekvationen

$$W' + \frac{2}{x}W = 0$$

(se Boyce-diPrima s 149). Multiplikation med integrerande faktorn $e^{2\ln x} = x^2$ ger

$$x^2W' + 2xW = 0 \quad \text{d v s} \quad \frac{d}{dx}(x^2W) = 0.$$

Härav följer $x^2W = C$ och $W = C/x^2$. Eftersom $W = 2$ då $x = 1$, måste $C = 2$. Man får $W = 2/x^2$.