Lösningsförslag till Tentamensskrivning i 5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 1, tisdagen den 23 augusti 2005

Uppgift 1. Ekvationen är separabel ty $e^{x^3}y' = 3x^2y^2$ ger

$$\frac{y'}{y^2} = e^{-x^3}3x^2.$$

Integration ger $-y^{-1} = -e^{-x^3} + C$. Härav följer $1/y = e^{-x^3} + D$ där D är en konstant. Detta ger

$$y = \frac{1}{e^{-x^3} + D}.$$

$y(0) = 1$ ger $1 = 1/(1+D)$ och $D + 1 = 1$, dvs $D = 0$. Lösningen är alltså $y = 1/e^{-x^3} = e^{x^3}$. $\square$

Uppgift 2. Sätt $T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ och beräkna först egenvärdena till T.

$$\begin{vmatrix} 5-m & 1 \\ 4 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad (5-m)(2-m) - 4 = 0$$

och $10 - 5m - 2m + m^2 - 4 = 0$ och härav fås $m^2 - 7m + 6 = 0$ och

$$m = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

Bestäm sedan egenvektorer (A, B) hörande till egenvärdena $m_1 = 6$ och $m_2 = 1$.

Vi betraktar först fallet $m_1 = 6$.

$$\begin{cases} (5-6)A + B = 0 \\ 4A + (2-6)B = 0 \end{cases} \quad \text{ger} \quad A = B \quad \text{och t.ex.} \quad A = B = 1.$$

Vi får en lösning $e^{6t}(1,1)$ till systemet.

Vi betraktar nu fallet $m_2 = 1$.

$$\begin{cases} (5-1)A + B = 0 \\ 4A + (2-1)B = 0 \end{cases} \quad \text{ger} \quad 4A + B = 0 \quad \text{och} \quad B = -4A$$

t.ex. $A = 1$, $B = -4$. Vi får en lösning $e^t(1, -4)$.

Den allmänna lösningen är då

$$(x, y) = c_1e^{6t}(1,1) + c_2e^t(1,-4) = (c_1e^{6t} + c_2e^t, c_1e^{6t} - 4c_2e^t).$$

$x(0) = 5$ och $y(0) = 0$ ger

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 - 4c_2 = 0 \end{cases}$$

Man får $c_1 = 4c_2$ och $5c_2 = 5$ vilket ger $c_2 = 1$ och $c_1 = 4$. Den sökta lösningen blir

$$\begin{cases} x = 4e^{6t} + e^t \\ y = 4e^{6t} - 4e^t \end{cases}$$

$\square$

Uppgift 3. Origo kritisk punkt till systemet ty $x = y = 0$ ger

$$x + e^y - \cos y = 0 \quad \text{och} \quad 3x - y - \sin y = 0.$$

Vi skriver med Taylorutveckling systemet

$$\begin{cases} x' = x + e^y - \cos y = x + 1 + y - 1 + f(x,y) = x + y + f(x,y) \\ y' = 3x - y - \sin y = 3x - y - y + g(x,y) = 3x - 2y + g(x,y) \end{cases}$$

där f och g har kontinuerliga förstaderivator och

$$\frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|} \to 0 \quad \text{och} \quad \frac{|g(x,y)|}{|(x,y)|} \to 0 \quad \text{då} \quad (x,y) \to 0.$$

Linearisering ger systemet

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

För matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ gäller

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0.$$

För att undersöka stabiliteten beräknar vi egenvärdena till A:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ 3 & -2-m \end{vmatrix} = (1-m)(-2-m) - 3 = -2 - m + 2m + m^2 - 3 = m^2 + m - 5$$

ger

$$m = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 5} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$m_1 = (\sqrt{21} - 1)/2 > 0$ medför att origo är en instabil kritisk punkt. $\square$

Uppgift 4. Ekvationen $xy' - (x+1)y = -x^3$ kan skrivas

$$y' - \frac{x+1}{x} y = -x^2.$$

Funktionen

$$-\frac{x+1}{x} = -1 - \frac{1}{x}$$

har primitiv funktion $-x - \ln x$. Integrerande faktor

$$e^{-x-\ln x} = \frac{1}{xe^x}.$$

Multiplikation ger

$$\frac{1}{xe^x} y' - \frac{x+1}{x^2 e^x} y = -\frac{x}{e^x}$$

vilket kan skrivas

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{xe^x} y\right) = -xe^{-x}.$$

Integration ger

$$\frac{e^{-x}}{x} y = -\int e^{-x} x\,dx = e^{-x} x - \int e^{-x} dx = xe^{-x} + e^{-x} + C$$

där C är en konstant. Härav fås $y = x^2 + x + Cxe^x$. $\square$

Uppgift 5. Den homogena ekvationen är av typen

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \quad \text{med} \quad \alpha = 3 \quad \text{och} \quad \beta = 1,$$

dvs Eulers ekvation. Vi löser först ekvationen

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \quad \text{dvs} \quad r(r-1) + 3r + 1 = 0$$

vilket ger $r^2 - r + 3r + 1 = 0$ och $r^2 + 2r + 1 = 0$. Denna ekvation har dubbelrot $r = -1$. Enligt teorin har då den homogena ekvationen lösningarna

$$y_1 = \frac{1}{x} \quad \text{och} \quad y_2 = \frac{\ln x}{x}.$$

Vi använder variation av parametrar för att bestämma en partikulärlösning till den givna inhomogena ekvationen. Ekvationen är

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1.$$

Vi har

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

och får (med $R = 1$)

$$\begin{cases} v_1' = -\frac{y_2 R}{W} = -\frac{(\ln x)/x}{1/x^3} = -x^2 \ln x \\ v_2' = \frac{y_1 R}{W} = \frac{1/x}{1/x^3} = x^2 \end{cases}$$

Härav fås

$$v_1 = -\int x^2 \ln x dx = -\frac{x^3}{3}\ln x + \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{3}x^3 \ln x + \frac{x^3}{9} + C$$

och $v_2 = x^3/3 + D$. Vi väljer $C = D = 0$ och får en partikulärlösning

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\frac{1}{3}x^2 \ln x + \frac{x^2}{9} + \frac{1}{3}x^2 \ln x = \frac{x^2}{9}.$$

Den allmänna lösningen blir då

$$y = A\frac{1}{x} + B\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2}{9}$$

där A och B är konstanter. □

Uppgift 6. Ekvationen kan skrivas

$$f + f * e^t = \sin t.$$

Laplacetransformering ger

$$F(s) + F(s)\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2+1}$$

där $F = \mathcal{L}(f)$. Härav fås

$$F(s)\Big(1 + \frac{1}{s-1}\Big) = F(s)\frac{s}{s-1} = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{och} \quad F(s) = \frac{s-1}{s(s^2+1)}.$$

Vi gör partialbråksuppdelning:

$$\frac{s-1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad \text{ger} \quad \frac{s-1}{s(s^2+1)} = \frac{As^2 + A + Bs^2 + Cs}{s(s^2+1)}$$

och

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = -1 \end{cases} \qquad \text{vilket ger} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Härav fås

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

och $f(t) = -1 + \cos t + \sin t$. $\square$