Institutionen för Matematik, KTH
Per Sjölin

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Måndagen den 19 december 2005, kl 14.00–19.00

1. $(1+x^2)(e^y y' - 2x) = 1$ ger

$$e^y y' = 2x + \frac{1}{1+x^2}.$$

Integration ger $e^y = x^2 + \arctan x + C$. Villkoret $y(0) = 0$ ger $1 = C$ och alltså $e^y = x^2 + \arctan x + 1$. Härav följer $y = \ln(x^2 + \arctan x + 1)$.

2. Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $A = \begin{pmatrix} -13 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Det gäller

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -13-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-13-\lambda)(1-\lambda) - 15 = \lambda^2 + 12\lambda - 28.$$

Ekvationen $\lambda^2 + 12\lambda - 28 = 0$ har lösningarna

$$\lambda = -6 \pm \sqrt{36+28} = -6 \pm 8 = -14 \text{ eller } 2.$$

A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -14$. Vi bestämmer sedan motsvarande egenvektorer. Ekvationen $(A - \lambda_1 I)K = 0$, där $\lambda_1 = 2$ och $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, ger

$$(-13-2)k_1 + 3k_2 = 0,$$

vilket leder till $k_2 = 5k_1$, t ex $k_1 = 1, k_2 = 5$. $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ är alltså egenvektor. För $\lambda_2 = -14$ fås analogt $(-13+14)k_1 + 3k_2 = 0$, d v s $k_1 = -3k_2$, t ex $k_2 = 1, k_1 = -3$. $K_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är alltså egenvektor.

Enligt teorin är då den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-14t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där c_1, c_2 är reella konstanter. Härav fås

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-14t} \\ 5c_1 e^{2t} + c_2 e^{-14t} \end{pmatrix}.$$

Villkoret $x(0) = -2, y(0) = 6$ ger

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = -2 \\ 5c_1 + c_2 = 6 \end{cases}$$

och härav fås $c_1 = c_2 = 1$. Den sökta lösningen blir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 3e^{-14t} \\ 5e^{2t} + e^{-14t} \end{pmatrix}.$$

3. Laplacetransformering av

$$\begin{cases} y' - 4y = \delta(t-3) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ger $sY(s) - 4Y(s) = e^{-3s}$, ty $\mathscr{L}(y') = sY(s) - y(0)$ om $\mathscr{L}(y) = Y(s)$. Man får $(s-4)Y(s) = e^{-3s}$, vilket ger

$$Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s-4}.$$

Vi använder nu andra translationssatsen:

$$\mathscr{L}\left(f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right) = e^{-as}F(s).$$

Här är $F(s) = \mathscr{L}(f)$ och

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le t < a; \\ 1 & \text{om } t \ge a. \end{cases}$$

I vårt fall är $a = 3$ och $f(t) = e^{4t}$, så att $F(s) = 1/(s-4)$. Vi får

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-3s}\frac{1}{s-4}\right) = e^{4(t-3)}\mathscr{U}(t-3) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le t < 3; \\ e^{4t-12} & \text{om } t \ge 3. \end{cases}$$

4. Vi sätter $z = y' - y$ och den givna ekvationer övergår då till $xz' - 2z = 0$ ty $z' = y'' - y'$. Härav fås $xz' = 2z$ och

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{x}.$$

Integration ger $\ln|z| = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + \ln A = \ln(Ax^2)$ för $x > 0$, där vi satt $C = \ln A$. Man får $|z| = Ax^2$ och därmed $z = Ax^2$, där A är en reell konstant. Sambandet $z = y' - y$ ger sedan $y' - y = Ax^2$. Multiplikation med den integrerande faktorn till denna ekvation, e^{-x}, ger $e^{-x}y' - e^{-x}y = Ax^2e^{-x}$. Vi har

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-x}y) = Ax^2e^{-x}, \quad \text{vilket ger} \quad e^{-x}y = A\int e^{-x}x^2\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Partiell integration ger

$$\int e^{-x}x^2\mathrm{d}x = -e^{-x}x^2 + \int e^{-x}2x\mathrm{d}x = -e^{-x}x^2 - e^{-x}2x + \int e^{-x}2\mathrm{d}x =$$
$$= -e^{-x}x^2 - e^{-x}2x - 2e^{-x} + B = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + B,$$

där B är en reell konstant. Insättning i ekvation (1) ger

$$e^{-x}y = -Ae^{-x}(x^2 + 2x + 2) + AB$$

och därmed $y = -A(x^2 + 2x + 2) + ABe^x$. Härav följer att den allmänna lösningen till den givna ekvationen är

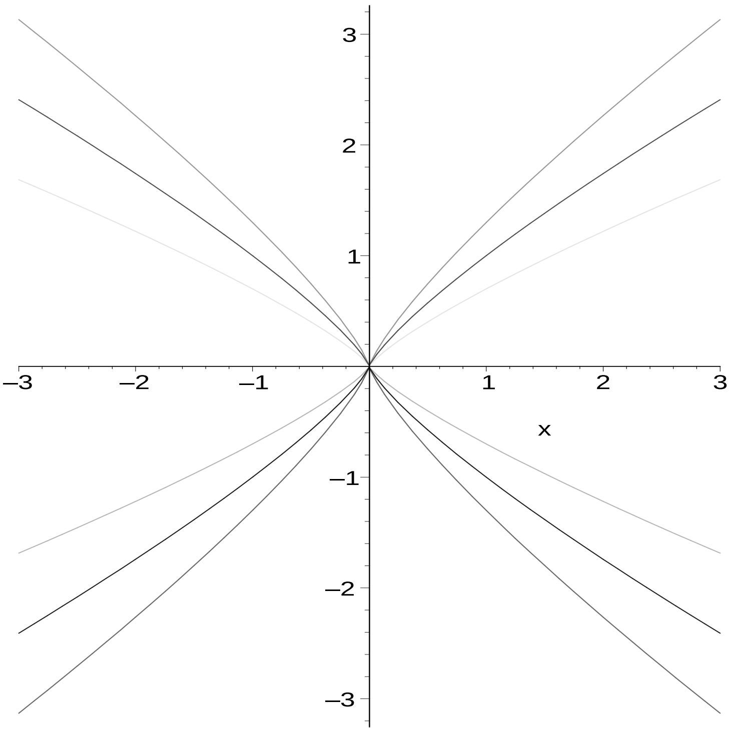
$$y = c_1(x^2 + 2x + 2) + c_2e^x,$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

5. Kritiska punkter saknas. Differentialekvationen för banorna blir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4/x}{5/y} \quad \text{d v s} \quad \frac{5}{4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

(ty $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$). Integration ger $5\ln|y| = 4\ln|x| + C$. Alltså är $\ln|y|^5 = \ln(|x|^4 A)$, där $A > 0$, så att $|y|^5 = A|x|^4$ och $|y| = A|x^{4/5}$. Härav fås $y = \pm A|x|^{4/5}$. Fasporträttet visas i figuren nedan. Banornas riktning bestäms av att $x' > 0$ för $y > 0$ och $x' < 0$ för $y < 0$.



6. Ekvationen kan skrivas

$$y'' + \frac{2+6x}{3x}y' = \frac{1}{x}y = 0$$

eller

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \text{där } p(x) = \frac{2+6x}{3x} \text{ och } q(x) = \frac{1}{x}.$$

Funktionerna $p(x)$ och $q(x)$ är inte analytiska i $x = 0$ men $xp(x) = 2/3 + 2x$ och $x^2 q(x) = x$ är analytiska. Härav följer att $x = 0$ är en regulär singulär punkt. Vi studerar först indicialekvationen $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. I vårt fall är $p_0 = 2/3$ och $q_0 = 0$, och vi får ekvationen

$$r^2 - r + \frac{2}{3}r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\left(r - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{3} \text{ eller } 0.$$

Enligt teorin har då den givna ekvationen lösningarna

$$x^{1/3}\left(1 + \sum_1^\infty a_n x^n\right) \quad \text{och} \quad 1 + \sum_1^\infty b_n x^n$$

på intervallet $0 < x < 1$. I uppgiftstexten är alltså $r_1 = 1/3$ och $r_2 = 0$. b_1, b_2 och b_3 kan bestämmas genom insättning av $y = \sum_0^\infty b_n x^n$ med $b_0 = 1$ i differentialekvationen. Vi får

$$\begin{aligned}
y' &= \sum_1^\infty b_n n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_2^\infty b_n n(n-1) x^{n-2} \\
3xy'' &= \sum_2^\infty b_n n(n-1)3x^{n-1} = \sum_1^\infty b_{n+1} 3n(n+1)x^n \\
2y' &= \sum_1^\infty b_n 2n x^{n-1} = \sum_0^\infty b_{n+1} 2(n+1) x^n \\
6xy' &= \sum_1^\infty b_n 6n x^n \\
3y &= \sum_0^\infty b_n 3x^n.
\end{aligned}$$

Efter insättning i differentialekvationen fås följande koefficient för x^n:

$$b_{n+1}(n+1)3n + b_{n+1}2(n+1) + b_n 6n + 3b_n.$$

Denna koefficient skall vara lika med noll för $n = 0, 1, 2, \ldots$, vilket ger

$$b_{n+1}(n+1)(3n+2) + b_n(6n+3) = 0 \quad \text{och} \quad b_{n+1} = -\frac{6n+3}{(n+1)(3n+2)} b_n,$$

där $n = 0, 1, 2, \ldots$. Insättning av $n = 0$ ger

$$b_1 = -\frac{3}{2} b_0 = -\frac{3}{2},$$

$n = 1$ ger

$$b_2 = -\frac{9}{2 \cdot 5} b_1 = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{20}$$

och $n = 2$ ger slutligen

$$b_3 = -\frac{15}{3 \cdot 8} b_2 = -\frac{5}{8} \cdot \frac{27}{20} = -\frac{27}{32}.$$