

Lösningsförslag till **TENTAMENSSKRIVNING**

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1

ONSDAGEN DEN 7 JUNI 2006, KL 14.00–19.00

1. Differentialekvationen

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}(1-y) \quad \text{ger} \quad (1+x^2)y' = 2x - 2xy \quad \text{och} \quad (1+x^2)y' + 2xy = 2x.$$

Integration ger $(1+x^2)y = x^2 + C$. Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = 0$ och

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

2. Ekvationen

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

har en lösning $y_1 = x$. Sätt $P = -\frac{x}{x-1}$. Vi söker en andra lösning $y_2 = vx$. Formeln

$$v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0$$

ger

$$xv'' + \left(2 - \frac{x^2}{x-1}\right)v' = 0.$$

Härav följer

$$v'' = -\frac{1}{x} \left(2 - \frac{x^2}{x-1}\right)v'$$

och

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{2x-2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = 1 + \frac{-x+2}{x(x-1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{-x+2}{x(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$$

och härav följer

$$\frac{v''}{v'} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Integration ger $\ln|v'| = x - \ln x^2 + \ln|x-1| + C$ och det följer att

$$|v'| = e^x \frac{|x-1|}{x^2} e^C.$$

Vi söker en lösning v till $v' = e^x(x-1)/x^2$ och får

$$v = e^x \frac{1}{x} + A,$$

vilket ger $y_2 = e^x + Ax$. Med $A = 0$ får vi $y_2 = e^x$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen blir då $y = c_1x + c_2e^x$, där c_1 och c_2 är konstanter.

3. Problemet kan skrivas

$$\begin{cases} y' = -y * e^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

och Laplacetransformering ger

$$sY - 1 = -Y \frac{1}{s-2},$$

där Y är Laplacetransformen av y . Härav fås

$$Y \left(s + \frac{1}{s-2} \right) = 1 \quad \text{och} \quad Y \frac{(s-1)^2}{s-2} = 1,$$

vilket ger

$$Y = \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{s-1-1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Invers Laplacetransformering ger $y = e^t - te^t$.

4. Vi bestämmer först egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$. Vi får ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0,$$

vilket ger $(\lambda-2)^2 = 9$ och $\lambda-2 = \pm 3$, d v s $\lambda = 5$ eller $\lambda = -1$. Vi bestämmer sedan egenvektorn $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ svarande mot egenvärdet $\lambda_1 = 5$. Man får $(2-5)k_1 + k_2 = 0$, d v s $k_2 = 3k_1$, t ex $k_1 = 1$ och $k_2 = 3$, vilket ger $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. På samma sätt fås $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ svarande mot $\lambda_2 = -1$ genom $(2+1)\ell_1 + \ell_2 = 0$, d v s $\ell_2 = -3\ell_1$, t ex $\ell_1 = 1$ och $\ell_2 = -3$, vilket ger $L = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen blir då

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ 3c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Origo är en sadelpunkt ty ett egenvärde är positivt och ett negativt.

5. Taylorutveckling ger

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \\ \cos(x+y) &= 1 + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \\ \arctan x &= x + \mathcal{O}(x^2) \\ \ln(1+y) &= y + \mathcal{O}(y^2), \quad \text{då } (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

Härav följer att systemet kan skrivas

$$\begin{cases} x' = 1 + x - 1 + \mathcal{O}(x^2 + y^2) = x + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \\ y' = x - y + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Eftersom $\mathcal{O}(x^2 + y^2)/\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ och

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

ger linearisering systemet

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}.$$

Karakteristiska ekvationen är $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, vilket ger $(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ och $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. En rot är positiv $\Rightarrow$ instabil kritisk punkt.

6. Ekvationen kan skrivas $y'' + Py' + Qy = 0$, där $P = -\frac{4x}{1-x^2}$ och $Q = -\frac{2}{1-x^2}$ är analytiska i $x = 0$. Problemet har därför en lösning på formen $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ i ett intervall kring $x = 0$. Vi skall sätta in $y = \sum_0^\infty a_n x^n$, där enligt randvillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$, i ekvationen. Vi har $y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}$ och $y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$. Det följer att

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_0^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\ -x^2 y'' &= -\sum_0^\infty n(n-1) a_n x^n \\ -4xy' &= -\sum_0^\infty 4n a_n x^n \\ -2y &= -\sum_0^\infty 2a_n x^n. \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger

$$\sum_0^\infty \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n\} x^n = 0.$$

Härav följer $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n = 0$ för $n = 0, 1, 2, \dots$, d v s $(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n(n-1) + 4n + 2)a_n = (n^2 - n + 4n + 2)a_n = (n^2 + 3n + 2)a_n = (n+2)(n+1)a_n$, vilket ger $a_{n+2} = a_n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \quad \text{ger} \quad a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 1, \\ a_1 &= 0 \quad \text{ger} \quad a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Härav fås

$$y = \sum_{k=0}^\infty x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{för } |x| < 1.$$