

Lösningssförslag till **TENTAMENSSKRIVNING**

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1
ONSDAGEN DEN 25 OKTOBER 2006, KL 8.00–13.00

1. Ekvationen $xy' = -y^2$ ger $y'/y^2 = -1/x$ som är en separabel ekvation. Integration ger $-y^{-1} = -\ln x + C$, där C är en konstant. Härav fås $1/y = \ln x + A$, där A är en konstant. Villkoret $y(e) = 1$ ger $1 = \ln e + A = 1 + A$, vilket ger $A = 0$. Man får alltså $1/y = \ln x$ och $y = 1/\ln x$. Detta gäller för $x > 1$.

2. Ekvationen har en lösning $y_1 = x$. För att bestämma en andra lösning gör vi ansatsen $y = y_2 = vx$. Man får $y' = v + xv'$, $y'' = 2v' + xv''$, och insättning i ekvationen ger

$$x^2(2v' + xv'') - (x^2 + 2x)(v + xv') + (x + 2)xv = 0.$$

Härav fås $x^3v'' - x^3v' = 0$ och $v'' = v'$, vilket ger $v''/v' = 1$. Integration ger $\ln|v'| = x + C$ och $|v'| = e^x e^C$. Vi kan välja $v' = e^x$ och $v = e^x$. Man får alltså $y_2 = xe^x$ och den allmänna lösningen blir

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 x e^x,$$

där c_1 och c_2 är konstanter.

3. Den givna ekvationen kan skrivas

$$y = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt \quad \text{d v s} \quad y = e^x + e^x * y.$$

Laplacetransformering ger $Y = \mathcal{L}(e^x) + \mathcal{L}(e^x)Y$, där $Y = \mathcal{L}(y)$. Härav fås $(s-1)Y = 1 + Y$ och $(s-2)Y = 1$, vilket ger $Y = \frac{1}{s-2}$. Invers Laplacetransformering ger $y = e^{2x}$.

4. Systemet kan skrivas $X' = AX$ där $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och A är matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till A . Man får

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0,$$

vilket ger $\lambda = 2$. A har alltså egenvärdet $\lambda = 2$, vars multiplicitet är 2. Vi bestämmer sedan en egenvektor $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$. Man får $k_1 + k_2 = 0$, t ex $k_1 = 1, k_2 = -1$ och $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Systemet har en lösning $X_1 = e^{2t}K$.

Det finns inte två linjärt oberoende egenvektorer svarande mot egenvärdet $\lambda = 2$. Vi bestämmer en vektor $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ sådan att $(A - \lambda I)P = K$, där I är enhetsmatrisen. Man får

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = k_1 \\ -p_1 - p_2 = k_2, \end{cases}$$

vilket ger $p_1 + p_2 = 1$, tex $p_1 = 1, p_2 = 0$. Vi får $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och en andra lösning till systemet ges av $X_2 = te^{2t}K + e^{2t}P$.

Den allmänna lösningen är då

$$X = c_1 e^{2t}K + c_2 t e^{2t}K + c_2 e^{2t}P = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t} \end{pmatrix},$$

där c_1 och c_2 är konstanter. Begynnelsevillkoret $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ger

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 = 2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3. \end{cases}$$

Härav fås

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3te^{2t} + 3e^{2t} \\ 2e^{2t} - 3te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(3t + 1) \\ e^{2t}(2 - 3t) \end{pmatrix}.$$

5. Vi sätter $P(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4$ och $Q(x, y) = y - x$ så att systemet kan skrivas

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Kritiska punkter ges av $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, dvs

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4 = 0 \\ y - x = 0. \end{cases}$$

Man får $y = x$ och insättning av detta i första ekvationen ger $x^2 + 3x^2 = 4$, dvs $x^2 = 1$, vilket ger $x = \pm 1$. Vi har därför de kritiska punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$. För att studera stabiliteten inför vi matrisen

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkten $(1, 1)$: $x = y = 1$ ger $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har $\det A \neq 0$ och vi undersöker egenvärdena till A . Vi får

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0,$$

vilket ger $\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 8}$. Då $\frac{9}{4} - 8 < 0$, har båda egenvärdena positiv realdel, vilket medför att $(1, 1)$ är en instabil kritisk punkt.

Punkten $(-1, -1)$: $x = y = -1$ ger $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\det A \neq 0$. Man får

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -6 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 8 = 0.$$

Härav fås $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 8}$. Egenvärdet $\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 8}$ är positivt och härav följer instabilitet.

6. Ekvationen kan skrivas $y'' + Py' + Qy = 0$, där $P = -\frac{6x}{1-x^2}$ och $Q = -\frac{4}{1-x^2}$. P och Q är analytiska i $x = 0$. Problemet har därför en lösning på formen $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ i ett intervall kring $x = 0$. Vi skall sätta in $y = \sum_0^\infty a_n x^n$, där enligt begynnelsevillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$, i ekvationen. Vi har $y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}$ och $y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$. Det följer att

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_0^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n, \\ -x^2 y'' &= -\sum_0^\infty n(n-1) a_n x^n, \\ -6xy &= -\sum_0^\infty 6n a_n x^n, \text{ och} \\ -4y &= -\sum_0^\infty 4a_n x^n. \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger

$$\sum_0^\infty \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n\} x^n = 0.$$

Härav följer att koefficienten för x^n är noll för alla n , vilket ger

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n(n^2 - n + 6n + 4) = a_n(n^2 + 5n + 4) = a_n(n+1)(n+4).$$

Man får $a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2} a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Begynnelsevärdena $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ger $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$ och $a_2 = \frac{4}{2}a_0 = 2$, $a_4 = \frac{6}{4}a_2 = 3$, $a_6 = \frac{8}{3}a_4 = 4$, $a_8 = \frac{10}{8}a_6 = 5$ och allmänt $a_{2n} = n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Härav fås $y = \sum_0^\infty (n+1)x^{2n}$ för $|x| < 1$. Vi har $(1-x)^{-1} = \sum_0^\infty x^n$ och derivering ger $(1-x)^{-2} = \sum_1^\infty n x^{n-1}$. Härav följer

$$(1-x^2)^{-2} = \sum_1^\infty n x^{2(n-1)} = \sum_0^\infty (n+1)x^{2n}.$$

Lösningen är alltså lika med $(1-x^2)^{-2}$.