Institutionen för Matematik, KTH

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1
ONSDAGEN DEN 10 JANUARI 2007, KL 14.00–19.00

1. Ekvationen kan skrivas $y' + (1 - \frac{2}{x})y = \frac{1}{x}e^{-x}$, vilket är en linjär ekvation av första ordningen med integrerande faktor $e^{x-2\ln x} = \frac{1}{x^2}e^x$. Multiplikation med denna faktor ger

$$\frac{1}{x^2}e^x y' + \frac{1}{x^2}e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^3}$$

och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}e^x y\right) = \frac{1}{x^3}.$$

Integration ger

$$\frac{1}{x^2}e^x y = -\frac{1}{2}x^{-2} + C,$$

där C är en konstant. Härav fås $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + Cx^2e^{-x}$. Villkoret $y(1) = 1$ ger sedan $1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + Ce^{-1} = (C - \frac{1}{2})e^{-1}$. Detta ger $C - \frac{1}{2} = e$ och $C = e + \frac{1}{2}$. Lösningen blir därför $y = (e + \frac{1}{2})x^2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}$.

2. Den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$ har karakteristisk ekvation $m^2 - 2m + 1 = 0$, vilket ger $m = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$, d v s dubbelrot $m = 1$. Härav följer att den homogena ekvationen har allmänna lösningen $y_H = Ae^x + Bxe^x$, där A och B är konstanter. Vi sätter $y_1 = e^x$ och $y_2 = xe^x$.

Vi skall bestämma en partikulärlösning till den givna ekvationen. Vi använder metoden med variation av parametrar och gör ansatsen $y_P = v_1y_1 + v_2y_2$. Vi sätter $R = e^x \ln x$ och låter W beteckna Wronskideterminanten av y_1 och y_2, d v s

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = xe^{2x} + e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}.$$

Enligt teorin fås

$$\begin{cases} v_1' = -\frac{y_2R}{W} = -\frac{xe^xe^x\ln x}{e^{2x}} = -x\ln x \\ v_2' = \frac{y_1R}{W} = \frac{e^xe^x\ln x}{e^{2x}} = \ln x. \end{cases}$$

Integration ger

$$\begin{aligned} v_1 &= -\int x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C_1 \end{aligned}$$

och
$$v_2 = \int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C_2.$$
Vi väljer $C_1 = C_2 = 0$ och får
$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x \\ v_2 = x\ln x - x \end{cases}$$
och $y_P = e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x) + xe^x(x\ln x - x)$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen blir då
$$\begin{aligned} y =& y_H + y_P = Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{2}x^2e^x\ln x + x^2e^x\ln x - x^2e^x \\ =& Ae^x + Bxe^x - \frac{3}{4}x^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x\ln x. \end{aligned}$$

3. Laplacetransformering av $y' + y * e^{-2t} = 1$, $y(0) = 0$ ger
$$sY + \frac{1}{s+2}Y = \frac{1}{s}$$
ty $\mathscr{L}(y') = sY$ och $\mathscr{L}(y * e^{-2t}) = \mathscr{L}(y)\mathscr{L}(e^{-2t}) = \frac{1}{s+2}Y$, där $Y = \mathscr{L}(y)$. Härav fås
$$\left(s + \frac{1}{s+2}\right)Y = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2+2s+1}{s+2}Y = \frac{1}{s}.$$
Man får $Y = (s+2)s^{-1}(s+1)^{-2}$ och partialbråksuppdelning ger
$$Y = 2\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$
Invers Laplacetransformering ger sedan $y = 2 - 2e^{-t} - te^{-t}$.

4. Systemet kan skrivas $X' = AX$, där $X = \binom{x}{y}$ och A är matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till A. Man får
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0,$$
vilket ger $\lambda = 1 \pm \sqrt{1+35} = 1 \pm 6 = 7$ eller -5. A har alltså egenvärden $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -5$. Om $K_1 = \binom{k_1}{k_2}$ är egenvektorn svarande mot λ_1, fås $-6k_1 + 4k_2 = 0$, vilket ger $2k_2 = 3k_1$. Vi kan välja $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ och får en egenvektor $K = \binom{2}{3}$. Om $K_2 = \binom{l_1}{l_2}$ är en egenvektor svarande mot λ_2, fås $6l_1 + 4l_2 = 0$. Vi kan välja $l_1 = 2$, $l_2 = -3$ och får $K_2 = \binom{2}{-3}$. Den allmänna lösningen till systemet är då
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1e^{7t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2e^{-5t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{7t} + 2c_2e^{-5t} \\ 3c_1e^{7t} - 3c_2e^{-5t} \end{pmatrix},$$
där c_1 och c_2 är konstanter. Villkoren $x(0) = 4$, $y(0) = 0$ ger
$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = 4 \\ 3c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$$

vilket ger $c_1 = c_2 = 1$. Den sökta lösningen är därför

$$\begin{cases} x = 2e^{7t} + 2e^{-5t} \\ y = 3e^{7t} - 3e^{-5t} \end{cases}.$$

Då ett egenvärde är positivt är $(0,0)$ en instabil kritisk punkt. Den är då heller inte asymptotiskt stabil. Då ett egenvärde är positivt och ett negativt, är origo en sadelpunkt.

5. Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} (x-y)(y-4) = 0 \\ (y-x)(x-4) = 0 \end{cases}$$

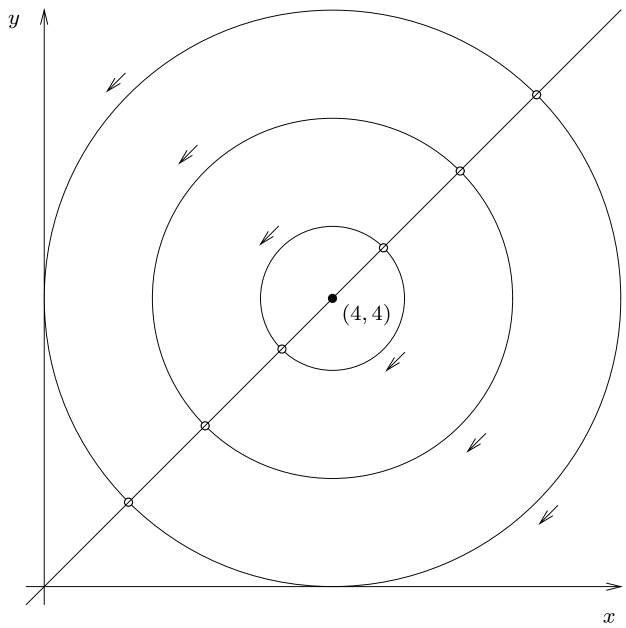
vilket ger att (x,y) är kritisk punkt om och endast om $x = y$. Man får också

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(y-x)(x-4)}{(x-y)(y-4)} = -\frac{x-4}{y-4}$$

och differentialekvationen för banorna blir

$$(y-4)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x-4).$$

Integration ger $\frac{1}{2}(y-4)^2 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + C$, där C är en konstant. Härav fås $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2C = A$, där A är en positiv konstant. Banorna ges alltså av $(x-4)^2 + (y-4)^2 = A$, $y \neq x$, d v s cirklar med medelpunkt $(4,4)$ (och med punkterna på linjen $y = x$ borttagna).



För att bestämma riktningen konstaterar vi slutligen med hjälp av systemet

$$\begin{aligned}
y > x,\ y > 4 &\Rightarrow x' < 0 \Rightarrow \text{banorna går åt vänster} \\
y > x,\ y < 4 &\Rightarrow x' > 0 \Rightarrow \text{banorna går åt höger} \\
y < x,\ y > 4 &\Rightarrow x' > 0 \Rightarrow \text{banorna går åt höger} \\
y < x,\ y < 4 &\Rightarrow x' < 0 \Rightarrow \text{banorna går åt vänster.}
\end{aligned}$$

6. Ekvationen kan skrivas

$$y'' + \frac{1+3x}{2x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

eller $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, där $p(x) = \frac{1+3x}{2x}$ och $q(x) = \frac{1}{x}$. Funktionerna $p(x)$ och $q(x)$ är inte analytiska i $x = 0$ men $xp(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$ och $x^2 q(x) = x$ är analytiska. Härav följer att $x = 0$ är en regulär singulär punkt. Vi studerar först indicialekvationen $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. I vårt fall är $p_0 = \frac{1}{2}$ och $q_0 = 0$, och vi får ekvationen $r^2 - r + \frac{1}{2}r = 0$, d v s $r^2 - \frac{1}{2}r = 0$, vilket ger $r = \frac{1}{2}$ eller $r = 0$. Enligt teorin har då den givna differentialekvationen lösningarna

$$x^{1/2}\left(1 + \sum_1^\infty a_n x^n\right) \quad \text{och} \quad 1 + \sum_1^\infty b_n x^n$$

på intervallet $0 < x < 1$. Härav fås $r_1 = \frac{1}{2}$ och $r_2 = 0$. b_1 och b_2 kan bestämmas genom insättning av $y = \sum_0^\infty b_n x^n$ med $b_0 = 1$ i differentialekvationen. Vi får

$$\begin{aligned}
y' &= \sum_1^\infty b_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty b_{n+1}(n+1)x^n \\
y'' &= \sum_2^\infty b_n n(n-1)x^{n-2} \\
2xy'' &= \sum_2^\infty 2b_n n(n-1)x^{n-1} = \sum_1^\infty 2b_{n+1}(n+1)nx^n \\
3xy' &= \sum_1^\infty 3b_n n x^n.
\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_1^\infty 2b_{n+1}(n+1)nx^n + \sum_0^\infty b_{n+1}(n+1)x^n + \sum_1^\infty 3b_n n x^n + \sum_0^\infty 2b_n x^n = 0.$$

Då koefficienten för x^n är lika med 0 fås

$$2b_{n+1}(n+1)n + b_{n+1}(n+1) + 3b_n n + 2b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Härav fås $b_{n+1}(n+1)(2n+1) + b_n(3n+2) = 0$ och

$$b_{n+1} = -\frac{3n+2}{(n+1)(2n+1)}b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$n = 0$ ger nu $b_1 = -\frac{2}{1}1 = -2$ och $n = 1$ ger $b_2 = -\frac{5}{2\cdot 3}(-2) = \frac{5}{3}$.