Lösningar till tentamensskrivning i SF 1629 Differentialekvationer och transformer II, del 1, den 29 oktober 2007

1. $-\frac{2}{x+1}$ har primitiv funktion $-2\ln(x+1)$ och vi väljer som integrerande faktor $e^{-2\ln(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$. Multiplikation med denna funktion ger

$$\frac{1}{(x+1)^2}y' - \frac{2}{(x+1)^3}y = \frac{1}{(x+1)^2}\ln x \qquad \text{dvs}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}y\right) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}.$$

Integration ger

$$\frac{1}{(x+1)^2}y = \int \frac{1}{(x+1)^2}\ln x\,dx = [\text{partiell integr.}] =$$

$$= -\frac{1}{x+1}\ln x + \int \frac{1}{x+1}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x+1} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + C \qquad \text{där } C \text{ är en}$$

konstant. Härav fås lösningen

$$y = (x+1)^2\left(C - \ln(x+1) + (\ln x)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right) =$$

$$= (x+1)^2\left(C - \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\ln x\right)$$

Då $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$ följer att $\lim\limits_{x \to 0+} y = C$.

2. För att finna en andra lösning till differentialekvationen sätter vi $y = vx$ och skall bestämma v. Vi har $y' = v + xv'$, $y'' = xv'' + 2v'$ och insättning i differentialekvationen ger

$$x^2(xv'' + 2v') - x(2x+2)(v + xv') + 2(x+2)vx = 0.$$

Härav följer $x^3 v'' = v' 2x^3$ och $\frac{v''}{v'} = 2$. Integration ger $\ln|v'| = 2x$ och $|v'| = e^{2x}$ t.ex. $v' = e^{2x}$. Integration ger $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ och $vx = \frac{1}{2}e^{2x}$. Om vi sätter $y_2 = xe^{2x}$ så blir $y_1 = x$ och y_2 två linjärt oberoende lösningar till ekvationen för $x > 0$. Den allmänna lösningen är då $y = c_1 x + c_2 x e^{2x}$. Det följer att

$$y' = c_1 + c_2 (x 2 e^{2x} + e^{2x}).$$

Villkoren $y(1) = 2$ och $y'(1) = 4$ ger sedan

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e^2 = 2 \\ c_1 + c_2 3e^2 = 4. \end{cases}$$

Subtraktion ger $2c_2 e^2 = 2$ och $c_2 = e^{-2}$ och $c_1 = 1$.

Den sökta lösningen blir därför

$$y = x + e^{-2} x e^{2x} = \underline{x + x e^{2x-2}}.$$

3. Problemet kan skrivas

$$\begin{cases} y * y = 6t^3 \\ y(1) = 6. \end{cases}$$

Laplacetransformering ger $Y^2 = 6 \frac{3!}{s^4} = \frac{36}{s^4}$

där Y är Laplacetransformen av y.

Härav följer $Y = \pm \frac{6}{s^2}$ och invers transformering ger $y = \pm 6t$. Av villkoret $y(1) = 6$

följer sedan att $y = 6t$.

4. Taylorutveckling ger $\cos x = 1 + O(x^2)$ och $e^y = 1 + y + O(y^2)$ då x och $y \to 0$. Systemet kan därför skrivas

$$\begin{cases} x' = x - 2y + O(x^2) \\ y' = -y + O(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Då funktionerna i högerledet i systemet tillhör C^1 ger linearisering systemet

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{med matris} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\det A = -1 \neq 0$ och skall bestämma egenvärdena till A. Det gäller att

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \text{ vilket}$$

ger egenvärdena $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$.

Då ett egenvärde är positivt följer att origo är en instabil kritisk punkt. Den är då inte heller asymptotiskt stabil

5. Vi sätter $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och systemet kan då skrivas

$$X' = AX + g(t) \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Vi skall bestämma den lösning som uppfyller $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda =$$

$= \lambda(\lambda - 2) = 0$ ger egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 2$.

Låt $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ vara en egenvektor svarande mot egenvärdet λ_1. Då fås $k_1 + k_2 = 0$ t.ex. $k_1 = 1$ och $k_2 = -1$. Vi kan välja $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Låt $K_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ vara en egenvektor svarande mot egenvärdet λ_2. Då fås $-l_1+l_2=0$ t.ex. $l_1=l_2=1$. Vi kan välja $K_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Det homogena systemet $X'=AX$ har därför 2 linjärt oberoende lösningar

$X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ och $X_2=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}$.

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\-1 & e^{2t}\end{pmatrix}$ är då en fundamentalmatris till systemet och $\det\Phi=2e^{2t}$.

Vi skall lösa problemet med metoden variation av parametrar. Lösningen ges av

$X(t)=\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\,g(s)\,ds$ ty enligt teorin är detta en lösning och den uppfyller också $X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Vi har

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{2e^{2t}}\begin{pmatrix}e^{2t} & -e^{2t}\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\e^{-2t} & e^{-2t}\end{pmatrix}$$

och

$$\Phi^{-1}(t)\,g(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\e^{-2t} & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Härav följer

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)\, g(s)\, ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

och den sökta lösningen är

$$X(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)\, g(s)\, ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} + 2t\,e^{2t} - 1 \\ -e^{2t} + 2t\,e^{2t} + 1 \end{pmatrix}$$

<u>Anmärkning.</u> Problemet kan även lösas på följande sätt: Av systemet följer att $x' - y' = e^{2t}$. Härav fås $x - y = \frac{1}{2}e^{2t} + C$ och $x = y + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$.

Sätt sedan in detta i andra ekvationen i systemet och <u>bestäm</u> y.

6. Ekvationen kan skrivas $y'' + Py' + Qy = 0$ där $P = \frac{8x}{2x^2-1}$ och $Q = \frac{4}{2x^2-1}$. P och Q är analytiska i $x = 0$ med potensserier som konvergerar för $2x^2 < 1$ dvs $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Den sökta lösningen kan bestämmas genom

insättning av $y = \sum_0^\infty a_n x^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$,

i ekvationen. Man får

$$y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}, \quad 8xy' = \sum_0^\infty 8 n a_n x^n,$$

$$y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_0^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

och $2x^2 y'' = \sum_0^\infty 2n(n-1) a_n x^n$.

Insättning ger

$$\sum_0^\infty [2n(n-1) a_n - (n+2)(n+1) a_{n+2} + 8n a_n + 4a_n] x^n = 0.$$

Härav fås

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n (2n^2 - 2n + 8n + 4) =$$

$$= a_n (2n^2 + 6n + 4) = a_n 2(n+2)(n+1),$$

vilket ger $a_{n+2} = 2a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Då $a_1 = 0$ fås $a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = \dots = 0$.

Dessutom fås $a_0 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 4$, $a_6 = 8$, och

allmänt $a_{2n} = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Härav följer $y = \sum_0^\infty 2^n x^{2n} = \sum_0^\infty (2x^2)^n =$

$$= \frac{1}{1 - 2x^2}$$

för $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.