Lösningar till tentamensskrivning i SF 1629 (5B1202) Differentialekvationer och transformer II, del 1, 2008-01-16

1. Differentialekvationen kan skrivas

$$y' - \frac{a}{x} y = 1 + \frac{1}{x}.$$

$-\frac{a}{x}$ har en primitiv funktion $-a \ln x = \ln x^{-a}$ och ekvationen har en integrerande faktor $e^{\ln x^{-a}} = x^{-a}$. Multiplikation med denna faktor ger

$$x^{-a} y' - a x^{-a-1} y = x^{-a} + x^{-a-1} \quad \text{dvs}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a} y\right) = x^{-a} + x^{-a-1}$$

Vi studerar 3 fall:

1) $a = 0$: Ekvationen blir $y' = 1 + x^{-1}$ vilket ger

$y = x + \ln x + C$ där C är en konstant.

2) $a = 1$: Ekvationen blir $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} y\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

vilket ger $\frac{1}{x} y = \ln x - \frac{1}{x} + C$ och

$$y = x \ln x - 1 + Cx$$

3) $a \neq 0$ och 1 : Integration ger

$$x^{-a} y = \frac{1}{1-a} x^{1-a} - \frac{1}{a} x^{-a} + C$$

och

$$y = \frac{1}{1-a} x - \frac{1}{a} + C x^{a}$$

2. Differentialekvationen har en lösning $y_1 = e^x$ och vi skall bestämma en andra linjärt oberoende lösning $y = v y_1 = v e^x$.

Man får $y' = v e^x + v' e^x$ och

$$y'' = v e^x + 2v' e^x + v'' e^x$$

Insättning i ekvationen ger

$$(4x - x^2)(ve^x + 2v'e^x + v''e^x) + (x^2 - 12)(ve^x + v'e^x) +$$

$$+ (12 - 4x) ve^x = 0 \quad \text{och}$$

$$4xv + 8xv' + 4xv'' - x^2 v - 2x^2 v' - x^2 v'' +$$

$$+ x^2 v + x^2 v' - 12v - 12v' + 12v - 4xv = 0$$

Härav följer

$v''(4x-x^2) = v'(x^2-8x+12)$ och

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{x^2-8x+12}{x^2-4x} = -\frac{x^2-4x}{x^2-4x} - \frac{-4x+12}{x^2-4x} =$$

$$= -1 + \frac{4x-12}{x(x-4)} = (\text{partialbråksuppdelning}) =$$

$$= -1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-4}$$

Integration ger $\ln|v'| = -x + 3\ln x + \ln(x-4)$

och $|v'| = e^{-x}x^3(x-4)$

Detta gäller om $v' = e^{-x}x^4 - e^{-x}4x^3$ dvs om

$v = -x^4 e^{-x}$. Härav fås

$y_2 = vy_1 = -x^4 e^{-x} e^{x} = -x^4$.

Den allmänna lösningen för $x \geq 4$ blir

därför $\underline{y = Ae^x + Bx^4}$ där A och B är konstanter.

3. Ekvationen kan skrivas $y + g * y = \sin 2t$

där $g(t) = t$ för $t \geq 0$.

Laplacetransformering ger

$Y + GY = \frac{2}{s^2+4}$ där G och Y betecknar

Laplacetransformerna av g och y. Då

$G(s) = \frac{1}{s^2}$ fås

$Y\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2+4}$ dvs

$Y \frac{s^2+1}{s^2} = \frac{2}{s^2+4}$.

Härav fås

$Y = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$ = (partialbråksuppdelning) =

$= -\frac{2}{3}\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{3}\frac{2}{s^2+4}$.

Invers Laplacetransformering ger sedan

$\underline{y = -\frac{2}{3}\sin t + \frac{4}{3}\sin 2t}$

4. Vi löser först det homogena systemet

$$\begin{cases} x' = 7x + 6y \\ y' = 2x + 6y. \end{cases}$$

Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen

$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Man får

$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$ vilket ger

$(7-\lambda)(6-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 13\lambda + 30 = 0.$

Härav följer $\lambda = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169-120}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 10 \\ 3 \end{cases}.$

Vi bestämmer sedan egenvektorer svarande mot egenvärdena $\lambda_1 = 10$ och $\lambda_2 = 3$.

1) $\lambda_1 = 10$. Om $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ egenvektor svarande mot λ_1 fås $-3k_1 + 6k_2 = 0$ och $k_1 = 2k_2$, t. ex. $k_2 = 1$, $k_1 = 2$ och $K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Härav följer att $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t}$ är en lösning till det homogena systemet.

2) $\lambda_2 = 3$. Om $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ egenvektor svarande mot λ_2 fås $4l_1 + 6l_2 = 0$ och $2l_1 = -3l_2$, t. ex. $l_2 = 2$, $l_1 = -3$ och $L = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Härav följer att $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$ är en lösning till det homogena systemet.

Den allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2c_1 e^{10t} - 3c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{10t} + 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$ där c_1 och c_2 är konstanter

Det homogena systemet har då en fundamentalmatris $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{10t} & -3e^{3t} \\ e^{10t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$. Det följer att

$\det \Phi(t) = 4e^{13t} + 3e^{13t} = 7e^{13t}$ och

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{e^{-13t}}{7} \begin{pmatrix} 2e^{3t} & 3e^{3t} \\ -e^{10t} & 2e^{10t} \end{pmatrix}.$$

Vi sätter $F(t) = \begin{pmatrix} 1-5t \\ -1/3 \end{pmatrix}$ och får då

$$\Phi^{-1}(t)\, F(t) = \frac{e^{-13t}}{7} \begin{pmatrix} 2e^{3t} & 3e^{3t} \\ -e^{10t} & 2e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-5t \\ -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} e^{-13t} \begin{pmatrix} e^{3t} - 10t\, e^{3t} \\ -\frac{5}{3} e^{10t} + 5t\, e^{10t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{-10t} - 10t\,e^{-10t} \\ -\frac{5}{3}e^{-3t} + 5t\,e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Vi sätter sedan $U(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt$ och enligt metoden variation av parametrar är då $X_p = \Phi(t)\,U(t)$ en partikulärlösning till det ursprungliga systemet. Vi har

$$U(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -\frac{1}{10}e^{-10t} - \int 10t\,e^{-10t}\,dt \\ \frac{5}{9}e^{-3t} + \int 5t\,e^{-3t}\,dt \end{pmatrix}.$$

Partiell integration ger

$$\int 10t\,e^{-10t}\,dt = -e^{-10t}\,t + \int e^{-10t}\,dt =$$

$$= -t\,e^{-10t} - \frac{1}{10}e^{-10t}$$

och $\int 5t\,e^{-3t}\,dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\,5t + \int \frac{5}{3}e^{-3t}\,dt =$

$= -\frac{5}{3}e^{-3t}\,t - \frac{5}{9}e^{-3t}$ efter lämpligt val av integrationskonstanterna.

Härav fås $U(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} t\,e^{-10t} \\ -\frac{5}{3}t\,e^{-3t} \end{pmatrix}$

Vidare fås

$$X_p = \Phi(t)\,U(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2e^{10t} & -3e^{3t} \\ e^{10t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^{-10t} \\ -\frac{5}{3}te^{-3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2t+5t \\ t-\frac{10}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det givna systemet är summan av X_p och den allmänna lösningen till det homogena systemet dvs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2c_1 e^{10t} - 3c_2 e^{3t} \\ -\frac{1}{3}t + c_1 e^{10t} + 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren ger sedan

$x(0) = 2c_1 - 3c_2 = -1$ och

$y(0) = c_1 + 2c_2 = 3$.

Härav följer $c_1 = c_2 = 1$ och den sökta lösningen blir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2e^{10t} - 3e^{3t} \\ -\frac{1}{3}t + e^{10t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

5. Taylorutveckling ger $\sin(x+y) = x+y+O(x^2+y^2)$ och $\tan x = x + O(x^2)$ då x och $y \to 0$.

Systemet kan därför skrivas

$$\begin{cases} x' = x+y + O(x^2+y^2) \\ y' = x-y + O(x^2) \end{cases}$$

Då funktionerna i högerledet i systemet tillhör C^1 ger linearisering systemet

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \end{cases} \quad \text{med matris } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\det A = -1-1 = -2 \neq 0$ och skall bestämma egenvärdena till A. Det gäller att

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)-1 =$$

$$= -(1-\lambda^2) - 1 = -1+\lambda^2-1 = \lambda^2-2 = 0$$

vilket ger $\lambda^2 = 2$ och egenvärdena $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Då ett egenvärde är positivt följer att origo är en instabil kritisk punkt. Den är då inte heller asymptotiskt stabil.

6. Ekvationen kan skrivas

$$y'' + \frac{x-1}{2x} y' + \frac{4}{2x} y = 0 \quad \text{eller}$$

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \text{ där}$$

$$p(x) = \frac{x-1}{2x} \text{ och } q(x) = \frac{2}{x}.$$

Funktionerna $p(x)$ och $q(x)$ är inte analytiska i $x=0$ men $x\,p(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ och $x^2 q(x) = 2x$ är analytiska. Härav följer att $x=0$ är en regulär singulär punkt. Vi studerar först indicialekvationen $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. I vårt fall är $p_0 = -\frac{1}{2}$ och $q_0 = 0$, och vi får ekvationen $r^2 - r - \frac{1}{2} r = r^2 - \frac{3}{2} r = 0$, vilket ger $r = \frac{3}{2}$ eller $r = 0$. Enligt teorin har då den givna differentialekvationen lösningarna $x^{3/2}\left(1 + \sum_1^{\infty} a_n x^n\right)$ och $1 + \sum_1^{\infty} b_n x^n$ på intervallet $0 < x < 1$. Härav fås $r_1 = \frac{3}{2}$ och $r_2 = 0$.

b_1 och b_2 kan bestämmas genom insättning av $y = \sum_0^\infty b_n x^n$ med $b_0 = 1$ i differentialekvationen. Vi får

$y' = \sum_1^\infty b_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty b_{n+1} (n+1) x^n$,

$y'' = \sum_2^\infty b_n n (n-1) x^{n-2}$,

$2xy'' = \sum_2^\infty 2 b_n n (n-1) x^{n-1} = \sum_1^\infty 2 b_{n+1} (n+1) n x^n$

och $xy' = \sum_1^\infty b_n n x^n$.

Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_0^\infty 2 b_{n+1} (n+1) n x^n + \sum_0^\infty b_n n x^n - \sum_0^\infty b_{n+1} (n+1) x^n +$$
$$+ \sum_0^\infty 4 b_n x^n = 0.$$

Härav följer

$$2 b_{n+1} (n+1) n + b_n n - b_{n+1} (n+1) + 4 b_n = 0$$

och $b_{n+1} (n+1)(2n-1) + b_n (n+4) = 0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ Det följer att

$$b_{n+1} = - \frac{n+4}{(n+1)(2n-1)} b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$n = 0$ ger

$$b_1 = -\frac{4}{-1}\,1 = 4$$

och $n = 1$ ger

$$b_2 = -\frac{1+4}{2(2-1)}\,4 = -5 \cdot 2 = -10$$