Lösningsförslag SF1629, 2010-01-12

1) Vi har

$$x' = F(x,y) = a_{11}x + a_{12}y, \qquad y' = G(x,y) = a_{21}x + a_{22}y.$$

Enligt sats i boken räcker det att villkoret $F_x + G_y \neq 0$ är uppfyllt. Dvs $a_{11} + a_{22} \neq 0$ räcker för att garantera att det inte finns några periodiska lösningar.

2) Se uppgift 2, Tentamen 5B1202.20050823

http://www.math.kth.se/math/GRU/TENTOR.pdf/5B1202.pdf/5B1202.ODE.pdf/5B1202.20050823.ODE.Svar.pdf

Egenvärden och egenvektorerna för matrisen A är

$$\lambda_1 = 6, \quad (1,1), \qquad\qquad \lambda_1 = 1, \quad (1,-4)$$

a) Den allmäna lösningen är

$$(x,y) = c_1 e^{6t}(1,1) + c_2 e^{t}(1,-4).$$

b) Lösningen som uppfyler villkoret $\mathbf{x}(0) = (5,0)$ blir då

$$x = 4e^{6t} + e^{t}, \qquad y = 4e^{6t} - 4e^{t}$$

3) Vi kan räkna gränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3\sin x)}{2\sin x^2} = 3/2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 R(x)(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2(\cos x)}{2\sin x^2} = -1/2$$

som visar att 0 är en regulär-singulär punkt. Indexekvationen blir då

$$r(r-1) + 3r/2 - 1/2 = 0$$

som har rötterna $r_1 = 1/2$ och $r_2 = -1$. Enligt sats i boken så finns det två linjärt oberoende lösningar, då dessa rötters differens inte är ett heltal. Substitutionen

$$y = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

med dess derivator y', y'', samt $\sin x = x + O(x^3)$,, $\sin x^2 = x^2 + O(x^6)$, $\cos x = 1 + O(x^2)$, leder till

$$2\sum_{n=0}^{1}(n+1/2)(n+1/2-1)a_n x^{n+1/2} + 3\sum_{n=0}^{1}(n+1/2)a_n x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{1} a_n x^{n+1/2} + O(x^{2+1/2}) = 0$$

Vi får att

$$(2(1/2)(1/2-1) + 3(1/2) - 1)a_0 = 0$$

dvs a_0 blir en obestämd konstant. För a_1 får vi

$$(2(1/2)^2 + 5(1/2) + 2)a_1 = 0$$

dvs $a_1 = 0$. Termen $x^{1/2}$ ges av $n = 0$, a_0 (fri konstant). Termerna $x^{3/2}$ har koeffiecienten lika med 0, då den ges i termer av a_1.

4) Se uppgift nr 6, Tentamen 5B1202.20050823

http://www.math.kth.se/math/GRU/TENTOR.pdf/5B1202.pdf/5B1202.ODE.pdf/5B1202.20050823.ODE.Text.pdf Vi har

$$f + f * e^t = \sin t.$$

Laplacetransformera båda sidor för att få

$$F(s) + F(s)\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2+1}$$

Härifrån kan man lösa ut F

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1},$$

och inverterar vi detta har vi

$$f(t) = -1 + \cos t + \sin t.$$

5) Se uppgift nr 5, Tentamen 5B1202.20031215

http://www.math.kth.se/ tranberg/5B1202.20031215.ODE.Text.pdf

(5a) Inför $y = x'$ som ger systemet

$$x' = y, \qquad y' = x^2 + 3x,$$

som har kritiska punkter $(0,0)$ samt $(-3,0)$. Jacobimatrisen är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+3 & 0 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0,0)$ har vi egenvärden $\lambda = \pm\sqrt{3}$, så punkten är en (instabil) sadelpunkt för det lineariserade systemet såväl som för ursprungsproblemet. I punkten $(-3,0)$ har matrisen egenvärden $\lambda = \pm i\sqrt{3}$. Det linjäriserade systemet har således ett (stabilt) centrum, men ingen definitiv slutsats kan dras för ursprungsystemet i denna punkt. Se tabel i boken.
(5b) Enligt Sats i boken måste periodiska lösningar omsluta minst en kritisk punkt. Eftersom systemet saknar kritiska punkter i halvplanet $x > 0$ så finns ingen periodisk lösning. Alternativt kan man se svaret direkt ur ekvationen $x'' = x^2 + 3x > 0$ för $x > 0$ medför att $x'(t)$ är växande vilket omöjliggör en periodisk lösning.

6) Se uppgift nr 6, Tentamen 5B1202.20031215

http://www.math.kth.se/ tranberg/5B1202.20031215.ODE.Text.pdf

Skriv om ekvationen $Mdx + Ndy = 0$ och multiplicera med den okända funktionen $\mu = \mu(t)$, $t = xy$. Det måste gälla att $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Detta ger

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \qquad \mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)$$

Eftersom $\mu_x = \mu' y$ och $\mu_y = \mu' x$ blir den senare ekvationen

$$\mu'(x(x^2y^2 + xy)y - y(x^2y^2 - 1)x) = \mu(3x^2y^2 - 1 - 3x^2y^2 - 2xy)$$

eller förenklat

$$\mu'(x^2y^2 + xy) = \mu(-1 - 2xy).$$

Med $t = xy$ får vi

$$\mu'(t)(t^2 + t) + \mu(t)(2t + 1) = 0,$$

som är första ordningens linjärekvation. Vi kan skriva om detta

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)(t^2 + t)) = 0,$$

som ger

$$\mu = \frac{C}{t^2 + t},$$

välj $C = 1$ och anta att $(t^2 + t \neq 0)$ eller att $xy \neq 0$ samt $xy \neq -1$.

I ursprungsproblemet vill vi bestämma ϕ så att

$$d\phi = \mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Vi har $\phi_x = \mu M = y$ som efter integration ger $\phi = xy + h(y)$. Derivera m.a.p. y får vi $\phi_y = x + h'$ som ska vara lika med μN. Detta ger $h' = -1/y$ och vi får

$$\phi(x, y) = xy - \ln|y| = C.$$

I fallet $xy = 0, -1$ får vi lösningarna $y = 0$ samt $y = -1/x$, då $x \neq 0$.