Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629, 2010-01-12, kl. 14.00–19.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 6 uppgifter som ger totalt högst 19 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: för betyg Fx krävs 8 poäng, för betyg E krävs 9 poäng, för betyg D krävs 11 poäng, för betyg C krävs 13 poäng, för betyg B krävs 15 poäng och för betyg A krävs 17 poäng.

1) Betrakta det autonoma systemet **(3p)**

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y,$$

där a_{ij} är rella tal med villkoret $a_{11} + a_{22} = 1$. Visa att systemet inte har några periodiska lösningar förutom origo.

2) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

och betrakta systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

a) Bestäm alla lösningar till systemet. **(2p)**

b) Bestäm den lösning som satisfierar **(1p)**

$$\mathbf{x}(0) = (5, 0).$$

3) Betrakta differentialekvationen

$$(2\sin(x^2))y'' + (3\sin x)y' - (\cos x)y = 0\ .$$

a) Visa att $x = 0$ är en reguljär-singulär punkt, samt bestäm största roten till indexekvationen (indicial) kring $x = 0$. **(1p)**

b) Bestäm koefficienten framför termerna $x^{1/2}, x^{3/2}$ i utvecklingen av serielösningen kring $x = 0$, för den största roten till indexekvationen. **(2p)**

4) Använd Laplacetransformen för att lösa integro-differentialekvationen **(3p)**

$$\int_0^t f(s)e^{t-s}ds = \sin t - f(t),$$

för $t \in [0, \infty)$.

V. G. V.

5) Man vill studera lösningarna $x = x(t)$ till

$$x'' - x^2 - 3x = 0.$$

a) Skriv om ekvationen på standardmässigt sätt till ett autonomt system av första ordningens differentialekvationer och bestäm de kritiska punkterna. Undersök sedan lineariseringarna av systemet i dessa punkter och dra slutsatser om stabilitet och lokala fasporträtt av ursprungssystemet. **(2p)**

b) Finns det någon periodisk lösning $x(t)$ till ekvationen som är positiv (dvs $x(t) > 0$ för alla $t \geq 0$) ? **(1p)**

6) Differentialekvationen **(4p)**

$$(x^2y^2 + xy)y + (x^2y^2 - 1)xy' = 0$$

har en integrerande faktor som endast beror av xy. Finn alla lösningar $y = y(x)$. (Lösningar kan anges i implicit form.)

Lycka till