**Uppgift 1, påståendena.**

i. Låt $\phi_0(t) = 0$ och

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \left[\frac{2}{3}(t-1)\right]^{3/2} & t \geq 1, \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

(jämför med exempel 3 i avsnitt 2.4 i boken). Då är $\phi_0$ och $\phi_1$ båda lösningar till det givna begynnelsevärdesproblemet. Vidare förhåller det sig så att oavsett hur litet intervallet $I$ är så finns det ett $t_0 \in I$ sådant att $\phi_0(t_0) \neq \phi_1(t_0)$. Svar: **falskt**.

ii. Eftersom

$$\frac{yx+y}{x^2+1} = y\frac{x+1}{x^2+1}$$

är en produkt av en funktion av $x$ med en funktion av $y$ får vi svar: **sant**.

iii. Låt $x_0 = \phi(t_0)$. Då har vi att

$$f(x_0) = f(\phi(t_0)) = \phi'(t_0) = 0,$$

där den andra likheten är en konsekvens av att ekvationen gäller. Följdaktligen är $x_0$ en kritisk punkt till ekvationen. Definiera $\psi(t) = x_0$. Då uppfyller $\phi$ och $\psi$ den givna ekvationen och de har samma begynnelsevärden i $t_0$. På grund av att $f$ är kontinuerligt deriverbar kan vi tillämpa existens och entydighetssatsen för att dra slutsatsen att $\phi = \psi$. Med andra ord har vi $\phi(t) = \phi(t_0)$ för alla $t \in I$. Svar: **sant**.

iv. Eftersom $\phi_1$ inte är identiskt lika med noll så finns det ett $t_0 \in \mathbb{R}$ sådant att $\phi_1(t_0) \neq 0$. Välj $c$ så att

$$\phi_2(t_0) = c\phi_1(t_0).$$

Då uppfyller $\phi_2$ och $c\phi_1$ samma ekvation och har samma begynnelsevärde i $t = t_0$. Via entydighetsdelen av den relevanta existens och entydighetssatsen är således $\phi_2 = c\phi_1$. Svar: **sant**.

v. Enligt antagande är $y_1$ och $y_2$ lösningar. Enligt Wronskiantestet är de en fundamentalmängd. Svar: **sant**.

vi. Låt $y_1$ vara lösningen till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

och $y_2$ vara lösningen till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Då är både $y_1$ och $y_2$ lösningar till den givna ekvationen, men de är inte lika (eftersom $\dot{y}_1(0) \neq \dot{y}_2(0)$). Svar: **falskt**.

vii. På grund av existens och entydighetssatsen är $y_2 = 2y_1$. Följdaktligen blir Wronskianen noll. Svar: **falskt**.

viii. Observera att

$$\frac{\sin x}{1+x^2}, \quad \frac{\cos x}{1+x^2}$$

är analytiska och har en potensserieutveckling i $x$ med konvergensradie $\geq 1$. Enligt en Sats 5.3.1 i boken får vi svar: **sant**.

ix. Antag att funktionen är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning. Då finns det konstanter $C$, $M$ och $a$ sådana att

$$e^{t^2} \leq Ce^{at}$$

för $t \geq M$. Denna olikhet medför att

$$e^{t^2 - at} \leq C$$

för $t \geq M$. Vänsterledet går mot oändligheten då $t \to \infty$, vilket motsäger olikheten; olikheten säger att vänsterledet är begränsat. Svar: **falskt**.

x. Den enda lösningen till den givna ekvationen som konvergerar mot noll är $\mathbf{x} = 0$. Följdaktligen är 0 inte en asymptotiskt stabil punkt till det givna systemet. Svar: **falskt**.

**Uppgift 2a**. De kritiska punkterna ges av nollställena till högerledet. I vårt fall ges de alltså av $x = n\pi$, där $n$ är heltal. Observera att om $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ (där $k$ är ett heltal) så är högerledet $> 0$ och om $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ (där $k$ är ett heltal) så är högerledet $< 0$. Följdaktligen är $2k\pi$ (där $k$ är ett heltal) en instabil kritisk punkt och $(2k+1)\pi$ (där $k$ är ett heltal) en stabil kritisk punkt.

**Uppgift 2b**. Eftersom 0 är en kritisk punkt är lösningen $x(t) = 0$. Detta ger en även en beskrivning av asymptotiken.

**Uppgift 2c**. I det här fallet konvergerar lösningen mot $\pi$ då $t \to \infty$ och mot 0 då $t \to -\infty$.

**Uppgift 3**. Uppgiftslydelsen säger oss att $A$:s egenvärden ges av 2 och 1. Vidare ges två egenvektorer svarande mot dessa egenvärden av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation ges alltså av

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Vad som återstår är att finna en partikulärlösning. I detta fall kan man ansätta en konstant partikulärlösning $\mathbf{x}_p$. Då måste $\mathbf{x}_p$ uppfylla

$$0 = A\mathbf{x}_p + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d.v.s.

$$A\mathbf{x}_p = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $A$ ej har 0 som ett egenvärde vet vi att $A$ är inverterbar. Följdaktligen är denna ekvation lösbar. Vidare vet vi enligt uppgiftslydelsen att

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Om vi multiplicerar denna likhet med $-3/2$ får vi

$$A\begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Med andra ord har vi

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger **svar:**

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man använda uppgiftslydelsen för att beräkna $A$ och sedan beräkna egenvärden och egenvektorer. Man kan sedan skriva ner en fundamentalmatris; i detta fall är

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

en fundamentalmatris. Efter det kan man använda parametervariationsmetoden för att finna en partikulärlösning.

**Uppgift 4**. Ansätt en lösning på formen

$$y(x) = \frac{1}{x+1}u(x).$$

Då ges ekvationen i termer av $u$ av

$$(x+1)u'' + 2u' = \frac{1}{x+1}.$$

Denna ekvation kan omformuleras till

$$w' + \frac{2}{x+1}w = \frac{1}{(x+1)^2}$$

om vi inför $w = u'$. En integrerande faktor ges av $(x+1)^2$, och vi får

$$[(x+1)^2 w]' = 1,$$

varav

$$(x+1)^2 w = x + 1 + C$$

och
$$w = \frac{1}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$
Eftersom $u' = w$ får vi då
$$u = \ln(x+1) - \frac{C}{x+1} + B.$$
Detta ger
$$y(x) = \frac{1}{x+1}\ln(x+1) - \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1}.$$
Man kan i detta skede kontrollera att
$$\frac{1}{x+1}, \quad \frac{1}{(x+1)^2}$$
är en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen och att
$$\frac{1}{x+1}\ln(x+1)$$
är en partikulärlösning. Följdaktligen får vi **svar:**
$$\frac{c_1}{(x+1)^2} + \frac{c_2}{x+1} + \frac{1}{x+1}\ln(x+1).$$

**Uppgift 5a**. Låt
$$P(x) = x^2 + 2x + 1, \quad Q(x) = x + 1, \quad R(x) = (x+2)x.$$
Vi vill visa att $(x+1)Q(x)/P(x)$ och $(x+1)^2R(x)/P(x)$ kan utvidgas till analytiska funktioner i en omgivning av $x_0 = -1$. Emellertid har vi
$$(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = 1$$
för $x \neq -1$. Följdaktligen kan $(x+1)Q(x)/P(x)$ utvidgas till en analytisk funktion i en omgivning av $x_0 = -1$. Vidare är
$$(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = R(x) = (x+2)x.$$
Även denna funktion kan utvidgas till en analytisk funktion i en omgivning av $x_0 = -1$. Följdaktligen är $x_0 = -1$ en reguljär singulär punkt. Inför b-delen av uppgiften kan det även vara av intresse att notera att
$$p_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = 1, \quad q_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = -1.$$
Indexekvationen ges alltså av
$$r^2 - 1 = 0,$$

varav $r = \pm 1$.

**Uppgift 5b**. Enligt uppgift skall vi finna en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}.$$

Beräkna

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x+1)^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Låt oss beräkna temerna som förekommer i ekvationen. Vi har

$$(x^2+2x+1)y''(x) = (x+1)^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x+1)^{n+r}.$$

Vidare har vi

$$(x+1)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r}.$$

Innan vi beräknar den tredje termen som förekommer, låt oss skriva om $(x+2)x$ som ett polynom i $x+1$. Vi har

$$(x+2)x = [(x+1)+1][(x+1)-1] = (x+1)^2 - 1.$$

Följdaktligen får vi

$$\begin{aligned} (x+2)xy(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}. \end{aligned}$$

Ekvationen kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x+1)^{n+r} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Eftersom en av summorna börjar först vid $n = 2$ måste vi hantera fallen $n = 0$ och $n = 1$ separat. Vi har

$$r(r-1)a_0 + r a_0 - a_0 = 0,$$

det vill säga $r^2 - 1$ (om vi förutsätter att $a_0 \neq 0$). Observera att detta är indexekvationen. Låt oss välja $r = 1$ och $a_0 = 1$. För $n = 1$ får vi

$$r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - a_1 = 0,$$

det vill säga

$$r(r+2)a_1 = 0.$$

Eftersom vi valt $r$ till 1 måste vi ha $a_1 = 0$. För $n \geq 2$ får vi

$$(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r)a_n + a_{n-2} - a_n = 0.$$

Eftersom vi valt $r = 1$ leder detta till

$$(n+2)na_n = -a_{n-2},$$

varav vi får rekursionsrelationen

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2)}a_{n-2}$$

för $n \geq 2$. Eftersom $a_1 = 0$ blir $a_{2k+1} = 0$ för alla icke-negativa heltal $k$. Å andra sidan har vi

$$a_{2k} = -\frac{1}{2k(2k+2)}a_{2k-2} = -\frac{1}{2^2k(k+1)}a_{2(k-1)}.$$

Beräkna

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2^2 2 \cdot 1}, \\ a_4 &= \frac{1}{2^4 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}. \end{aligned}$$

För $k = 0, 1, 2$ har vi alltså

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k}(k+1)!k!}.$$

För att bevisa att denna formel gäller räcker det alltså att anta att den gäller för $k$ och visa att den gäller för $k+1$. Enligt rekursionsformeln och det induktiva antagandet har vi

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= -\frac{1}{2^2(k+1)(k+2)}a_{2k} = -\frac{1}{2^2(k+1)(k+2)}(-1)^k \frac{1}{2^{2k}(k+1)!k!} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{2(k+1)}(k+2)!(k+1)!}. \end{aligned}$$

Formeln gäller alltså även för $k+1$. Via induktion gäller den således för alla icke-negativa $k$, och vi får **svar:**

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}(k+1)!k!}(x+1)^{2k+1}.$$

**Uppgift 6**. Om $(0,0)$ är en asymptotiskt stabil punkt till systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^3 + y^4,\\ \dot{y} &= -y + x^5 + y^3\end{aligned}$$

är svaret på frågan ja. Om vi linjäriserar systemet kring origo får vi

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Eftersom egenvärdena båda är negativa får vi slutsatsen att origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till det ursprungliga systemet. **Svar:** ja.

**Uppgift 7a**. Om $X$ och $Y$ betecknar Laplacetransformen av $x$ och $y$ så ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} sX + 2Y &= \frac{1}{s}e^{-s},\\ sY + 2Y - X &= 0.\end{aligned}$$

På matrisform får vi

$$\begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-s}}{s} \\ 0 \end{pmatrix},$$

varav

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e^{-s}}{s} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta leder till **svar:**

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s+2)e^{-s}}{s(s^2+2s+2)}\\ Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+2)}.\end{aligned}$$

**Uppgift 7b**. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)} &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1},\\ \frac{1}{s(s^2+2s+2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}.\end{aligned}$$

Följdaktligen har vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= 1 - e^{-t}\cos t,\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t).\end{aligned}$$

Vi får **svar:**

$$\begin{aligned} x(t) &= [1 - e^{-(t-1)}\cos(t-1)]u_1(t),\\ y(t) &= \frac{1}{2}[1 - e^{-(t-1)}\cos(t-1) - e^{-(t-1)}\sin(t-1)]u_1(t).\end{aligned}$$