

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*

Betyg: 10 poäng (inklusive bonus) ger garanterat betyg E, 13 poäng ger garanterat betyg D, 15 poäng ger garanterat betyg C, 17 poäng ger garanterat betyg B, 20 poäng ger garanterat betyg A. 9 poäng ger garanterat betyget Fx som berättigar till en kompletterande tentamen.

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).

Examinator: Hans Ringström.

1 (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering):

- i. Det finns ett öppet intervall I , innehållande 1, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t), \\ \phi(1) &= 0\end{aligned}$$

har en unik lösning på I .

- ii. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx + y}{x^2 + 1}$$

är separabel.

- iii. Låt f vara en kontinuerligt deriverbar funktion och ϕ vara en kontinuerligt deriverbar lösning till ekvationen

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t))$$

definierad på ett öppet intervall I . Om $\phi'(t_0) = 0$ för något $t_0 \in I$ så är $\phi(t) = \phi(t_0)$ för alla $t \in I$.

- iv. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och om ϕ_1 inte är identiskt lika med noll, så finns det en konstant c sådan att $\phi_2 = c\phi_1$.

- v. Antag att $y_1(t) = e^{-t}$ och $y_2 = e^t$ är lösningar till ekvationen

$$(1) \quad \ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0,$$

där b och c är reella konstanter. Om y är en lösning till (1), så finns det reella konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

- vi. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

- vii. Låt p och q vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$.
Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 1, \\ \dot{y}(t_0) &= 1.\end{aligned}$$

och y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 2, \\ \dot{y}(t_0) &= 2.\end{aligned}$$

Det får betraktas som givet att y_1 och y_2 är definierade på I . Då utgör y_1 och y_2 en fundamental mängd av lösningar till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0$$

på intervallet I .

- viii. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(1+x^2)y''(x) + \sin(x)y'(x) + \cos(x)y(x) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där potensserien har en konvergensradie $\rho \geq 1$.

- ix. Funktionen e^{t^2} är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning (exponential order).
x. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

2a (1 poäng). Finn och karakterisera de kritiska punkterna till ekvationen

$$x' = (1+x^2)\sin x$$

som stabila, instabila eller semi-stabila.

2b (1 poäng). Beskriv det asymptotiska beteendet (då $t \rightarrow \infty$ och $t \rightarrow -\infty$) av lösningen till

$$\begin{aligned}x' &= (1+x^2)\sin x \\ x(0) &= 0\end{aligned}$$

(det får antas vara givet att lösningen existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

2c (1 poäng). Beskriv det asymptotiska beteendet (då $t \rightarrow \infty$ och $t \rightarrow -\infty$) av lösningen till

$$\begin{aligned}x' &= (1+x^2)\sin x \\ x(0) &= \pi/2\end{aligned}$$

(det får antas vara givet att lösningen existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

3 (3 poäng). Givet att A är en 2×2 -matris sådan att

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4 (3 poäng). Givet att

$$y_1(x) = \frac{1}{x+1}$$

är en lösning till

$$(x^2 + 2x + 1)y'' + (4x + 4)y' + 2y = 0,$$

finn den allmänna lösningen till

$$(x^2 + 2x + 1)y'' + (4x + 4)y' + 2y = \frac{1}{x+1}$$

för $x > -1$.

5a (1 poäng). Visa att $x_0 = -1$ är en reguljär singulär punkt till

$$(2) \quad (x^2 + 2x + 1)y'' + (x + 1)y' + (x + 2)xy = 0.$$

5b (2 poäng). Finn en serielösning till (2) på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}.$$

Serielösningen skall vara icke-trivial (d.v.s., den får inte vara identiskt lika med noll) och koefficienterna a_n skall beräknas explicit.

6 (3 poäng). Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$(3) \quad \dot{x} = -x + x^3 + y^4,$$

$$(4) \quad \dot{y} = -y + x^5 + y^3,$$

$$(5) \quad x(0) = x_0,$$

$$(6) \quad y(0) = y_0.$$

Finns det ett $r > 0$ sådant att om $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < r$ så har lösningen x, y till (3)-(6) egenskapen att den existerar för alla $t \geq 0$ och egenskapen att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)?$$

Var god vänd!

7a (2 poäng). Givet att x och y uppfyller

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) &= u_1(t), \\ \frac{dy}{dt}(t) + 2y(t) - x(t) &= 0, \\ x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0,\end{aligned}$$

där

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 1 \\ 0 & t < 1, \end{cases}$$

beräkna Laplacetransformen av x och y .

7b (2 poäng). Beräkna $x(t)$ och $y(t)$ för $t \geq 0$.