LÖSNINGSFÖRSLAG, TENTAMEN, DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1, FÖR CTFYS2 OCH CMEDT3, SF1629, DEN 11 JANUARI 2011, KL. 14:00–19:00

Uppgift 1 (3 poäng).

i. Falskt.
ii. Falskt.
iii. Sant.
iv. Falskt.
v. Falskt.
vi. Falskt.
vii. Sant.
viii. Sant.
ix. Sant.
x. Sant.

Uppgift 2 (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' + y = e^t \ln t$$

för $t > 0$.

Lösning: Låt oss börja med att finna den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Den karakteristiska ekvationen ges av

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

som har en dubbelrot $r = 1$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges alltså av

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Vad som kvarstår är att finna en partikulärlösning. Ansätt

$$y(t) = u(t)e^t.$$

Beräkna

$$\begin{aligned} y' &= e^t u + e^t u', \\ y'' &= e^t u + 2e^t u' + e^t u''. \end{aligned}$$

Följdaktligen har vi att

$$y'' - 2y' + y = e^t u''.$$

Vi får alltså en lösning till ekvationen om och endast om

$$u'' = \ln t.$$

Med andra ord har vi (med hjälp av partialintegration)

$$u'(t) = t \ln t - t + a_1,$$

varav (med hjälp av partialintegration)

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^2 + a_1 t + a_2.$$

Eftersom a_1 och a_2 svarar mot den homogena lösningen, får vi en partikulärlösning genom att välja dessa konstanter till noll, d.v.s.

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{3}{4}t^2$$

och

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 3)e^t.$$

Vi får alltså **svar:**

$$c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 3)e^t.$$

Uppgift 3 (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + y &= f, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{cases}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & t \geq \pi, \\ 0 & t < \pi. \end{cases}$$

Lösning: Laplacetransformera ekvationen:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = F(s),$$

där $Y(s)$ betecknar Laplacetransformen av y och F betecknar Laplacetransformen av f. Notera att

$$\sin t = \sin(t - \pi + \pi) = -\sin(t - \pi).$$

Följdaktligen gäller det att

$$f(t) = -\sin(t - \pi)u_\pi(t),$$

varav

$$F(s) = -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Följdaktligen ges $Y(s)$ av

$$Y(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)^2}.$$

Enligt BETA ges inverstransformen av

$$-\frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

av

$$-\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t.$$

varav **svar:**

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[-\sin(t - \pi) + (t - \pi)\cos(t - \pi)\right]u_\pi(t).$$

Uppgift 4 (3 poäng). Finn de kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' &= 2x - 2x^2 - xy, \\ y' &= 2y - 2y^2 - xy \end{cases}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Lösning: De kritiska punkterna ges av nollställena till högerledet, d.v.s. av

$$\begin{cases} x(2 - 2x - y) = 0, \\ y(2 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Vi har fyra möjligheter:

- $x = 0$ och $y = 0$, d.v.s. $(x, y) = (0, 0)$,
- $x = 0$ och $2 - 2y - x = 0$, d.v.s. $(x, y) = (0, 1)$,

- $2 - 2x - y = 0$ och $y = 0$, d.v.s. $(x, y) = (1, 0)$,
- $2 - 2x - y = 0$ och $2 - 2y - x = 0$, d.v.s. $(x, y) = (2/3, 2/3)$.

För att avgöra stabiliteten behöver vi analysera Jacobimatrisen associerad med högerledet. Låt

$$F(x, y) = 2x - 2x^2 - xy, \quad G(x, y) = 2y - 2y^2 - xy$$

och

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - 4y - x \end{pmatrix}.$$

Vi har fyra fall att betrakta. Vi har

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Följdaktligen är $(0, 0)$ en instabil kritisk punkt. Vidare har vi

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Följdaktligen är motsvarande egenvärden 1 och -2, varav $(0, 1)$ är en instabil kritisk punkt. Via ett analogt resonemang får man att $(1, 0)$ är en instabil kritisk punkt. Betrakta, avslutningsvis,

$$J(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande egenvärden har en negativ realdel, varav $(2/3, 2/3)$ är en stabil kritisk punkt. **Svar:** De kritiska punkterna ges av $(0, 0)$ (instabil), $(0, 1)$ (instabil), $(1, 0)$ (instabil) och $(2/3, 2/3)$ (stabil).

Uppgift 5 (3 poäng). a. Finns det en fundamentalmängd av lösningar på potensserieform till

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

kring $x_0 = -1$? Om svaret är ja, ange konvergensradien hos lösningarna i fundamentalmängden (*motivera ditt svar väl*).

Lösning: I jämförelse med den allmänna teorin kan man identifiera funktionerna

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = 2x, \quad R(x) = 2;$$

jämför med formuleringen av Sats 5.3.1, sidan 262. Det som avgör om det finns en fundamentalmängd av lösningar på potensserieform är om $p(x) = Q(x)/P(x)$ och $q(x) = R(x)/P(x)$ är analytiska i $x_0 = -1$. Om p och q har en konvergensradie som är åtminstone ρ så finns det vidare en fundamentalmängd av lösningar på potensserieform till ekvationen kring $x_0 = -1$ med konvergensradie ρ. I detta fall är $p(x) = 2x$ och $q(x) = 2$ analytiska med konvergensradie oändligheten. Följdaktligen får vi **svar:** ja, det finns en fundamentalmängd av lösningar på potensserieform till ekvationen kring $x_0 = -1$. Vidare är konvergensradien ∞.

b. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform till

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

kring $x_0 = -1$.

Lösning: Ansätt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n.$$

Beräkna

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x+1)^n,$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n (x+1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x+1)^n.$$

Notera att

$$2xy'(x) = 2(x+1)y'(x) - 2y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n (x+1)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x+1)^n.$$

Ekvationen är alltså (givet ansatsen) ekvivalent med

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2n a_n - 2(n+1)a_{n+1} + 2a_n = 0,$$

för heltal $n \geq 0$, d.v.s. med

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_n = 0,$$

för heltal $n \geq 0$. Detta ger **svar:** rekursionsformeln ges av

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_{n+1} - \frac{2}{n+2} a_n$$

för heltal $n \geq 0$.

Uppgift 6 (3 poäng). Finn en matrisvärd funktion Φ sådan att

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Phi(t)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$ och sådan att

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Om vi betecknar Φ:s kolonner med $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ så är problemet ekvivalent med att lösa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(lösningen till detta problem är $\mathbf{x}_1$) samt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(lösningen till detta problem är $\mathbf{x}_2$). Låt oss följdaktligen börja med att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Då ges A:s egenvärden av

$$0 = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Följdaktligen ges egenvärdena av $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$. En egenvektor svarande mot λ_1 kan beräknas till

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och en egenvektor svarande mot λ_2 kan beräknas till

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t-1} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-1)};$$

det är praktiskt att uttrycka den allmänna lösningen på detta sätt, men man kan naturligtvis också uttrycka den på ett annat sätt. Följdaktligen kan man beräkna att

$$\mathbf{x}_1 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t-1} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-1)},$$

och att

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t-1} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-1)}.$$

Följdaktligen får vi **svar:**

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{t-1} + 3e^{2(t-1)} & 2e^{t-1} - 2e^{2(t-1)} \\ -3e^{t-1} + 3e^{2(t-1)} & 3e^{t-1} - 2e^{2(t-1)} \end{pmatrix}.$$

Uppgift 7 (4 poäng). För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till

$$\begin{cases} y' &= y^{1/3}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

på I? För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det inte ett sådant öppet intervall?

Lösning: Låt $f(x, y) = y^{1/3}$. Om punkten (x_0, y_0) är sådan att f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga i en rektangel med (x_0, y_0) i sitt inre, så finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till begynnelsevärdesproblemet på I; jämför med Sats 2.4.2, sidan 70. Eftersom den aktuella funktionen f är kontinuerlig och kontinuerligt deriverbar för $y \neq 0$ får vi slutsatsen att för alla (x_0, y_0) sådana att $y_0 \neq 0$ så finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till begynnelsevärdesproblemet på I. Om $y_0 = 0$ är satsen emellertid inte tillämpbar. Därmed är emellertid inte sagt att det inte finns ett öppet intervall med de önskade egenskaperna om $y_0 = 0$. För att visa att det inte finns ett öppet intervall måste vi konstruera motexempel. Om $y_0 = 0$ får vi direkt en lösning, given av $y_a(x) = 0$. Vi måste nu konstruera en annan lösning. Detta kan man göra t.ex. genom att utnyttja det faktum att ekvationen är separabel. Låt

$$y_b(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{3/2} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0. \end{cases}$$

Då är även y_b en lösning (jämför med Exempel 3, sidan 71-72 i boken). Oavsett hur litet öppet intervall I (som innehåller x_0) man väljer så kommer y_a vara skild ifrån y_b i någon punkt i I. Om $y_0 = 0$ finns det allstå inte ett öppet intervall med de önskade egenskaperna. **Svar:** Om $y_0 \neq 0$ finns det ett öppet intervall med de önskade egenskaperna, men om $y_0 = 0$ finns det inte ett sådant intervall.