TENTAMEN, DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1, FÖR CTFYS2 OCH CMEDT3, SF1629, DEN 11 JANUARI 2011, KL. 14:00–19:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*
Betyg: 10 poäng (inklusive bonus) ger garanterat betyg E, 13 poäng ger garanterat betyg D, 15 poäng ger garanterat betyg C, 17 poäng ger garanterat betyg B, 20 poäng ger garanterat betyg A. 9 poäng ger garanterat betyget Fx som berättigar till en kompletterande tentamen.
OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).
Examinator: Hans Ringström.

Uppgift 1(av 7) (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering och på formen **sant** eller **falskt**):

i. Ekvationen
$$\frac{dy}{dx} = y^2$$
är en första ordningens linjär differentialekvation.

ii. Låt ϕ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= e^{\phi^2(t)} \sin(\phi(t)), \\ \phi(0) &= -\pi/2. \end{aligned}$$
Då gäller att
$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = -\pi$$
(det får betraktas som givet att lösningen är unik och existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

iii. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där g inte är identiskt lika med noll. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$
(definierade på ett öppet intervall I), så är $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ en lösning till
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t).$$

iv. Om y_1 och y_2 är lösningar till
$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = e^t$$
så är $y = y_1 + y_2$ en lösning.

v. Antag att y_1 och y_2 är lösningar till
$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = 0.$$
Om $y_1(t_0) \neq 0$ för något t_0 så finns det en konstant c sådan att $y_2 = cy_1$.

vi. Det finns reella konstanter b och c sådana att $y(t) = t\sin t$ är en lösning till
$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

vii. Om funktionen y uppfyller ekvationen

$$x^2y''(x) + \alpha xy'(x) + \beta y(x) = 0$$

för $x > 0$, där α och β är reella konstanter, så uppfyller $\phi(t) = y(e^t)$ ekvationen

$$\ddot{\phi}(t) + (\alpha - 1)\dot{\phi}(t) + \beta\phi(t) = 0$$

för alla $t \in \mathbb{R}$.

viii. Funktionen $e^{\sqrt{t}}$ är av exponentiell ordning (exponential order).

ix. Antag att A är en 2×2 matris sådan att

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Då ges den allmänna lösningen (general solution) till ekvationen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

av

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

x. Det finns en unik lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix} \sin t^2 & te^{t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \cos t \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ t^2e^t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definierad för alla t.

Uppgift 2(av 7) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' + y = e^t \ln t$$

för $t > 0$.

Uppgift 3(av 7) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + y &= f, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{cases}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & t \geq \pi, \\ 0 & t < \pi. \end{cases}$$

Uppgift 4(av 7) (3 poäng). Finn de kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' &= 2x - 2x^2 - xy, \\ y' &= 2y - 2y^2 - xy \end{cases}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Uppgift 5(av 7) (3 poäng). a. Finns det en fundamentalmängd av lösningar på potensserieform till

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

kring $x_0 = -1$? Om svaret är ja, ange konvergensradien hos lösningarna i fundamentalmängden (*motivera ditt svar väl*).

b. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform till

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

kring $x_0 = -1$.

Uppgift 6(av 7) (3 poäng). Finn en matrisvärd funktion Φ sådan att

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Phi(t)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$ och sådan att

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 7(av 7) (4 poäng). För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till

$$\begin{cases} y' &= y^{1/3}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

på I? För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det inte ett sådant öppet intervall?