Lösningsförslag, tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 19 oktober 2011, kl. 8:00–13:00

Del A

1 (av 8) (3 poäng). Svar:

i. sant,
ii. falskt,
iii. sant,
iv. sant,
v. falskt,
vi. sant,
vii. falskt,
viii. falskt,
ix. sant,
x. sant.

2 (av 8) (3 poäng). Finn en implicit lösning till ekvationen

$$y' = y^2 e^x + e^x.$$

Lösning: Ekvationen är separabel:

$$y' = (y^2 + 1)e^x.$$

Dela med $y^2 + 1$:

$$\frac{1}{1+y^2} y' = e^x.$$

Integrering med avseende på x ger

$$\arctan y = e^x + C,$$

där C är en konstant. **Svar:** $y(x) = \tan(e^x + C)$.

3 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösning: Låt oss börja med att beräkna egenvärdena till

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

De ges av ekvationen

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -4 + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 1.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. För att finna en egenvektor svarande mot $\lambda_1 = 1$ löser vi ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \bar{v} = \bar{0}.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att finna en egenvektor svarande mot $\lambda_2 = -1$ löser vi ekvationen

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \bar{v} = \bar{0}.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(t), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Lösning: Observera att ekvationen kan skrivas

$$y'' + y = u_1(t) - u_2(t).$$

Eftersom $y(0) = y'(0) = 0$ så ger Laplacetransformering av denna ekvation likheten

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-2s},$$

där Y betecknar Laplacetransformen av y. Följdaktligen ges Y av

$$Y(s) = H(s)e^{-s} - H(s)e^{-2s}, \tag{1}$$

där

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Partialbråksuppdelning av H ger

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Om vi kallar Laplaceinverstransformen av H för h får vi då

$$h(t) = 1 - \cos t.$$

Vidare ger (1) att

$$y(t) = h(t-1)u_1(t) - h(t-2)u_2(t).$$

Svar:

$$y(t) = [1 - \cos(t-1)]u_1(t) - [1 - \cos(t-2)]u_2(t).$$

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-x)e^y, \\ \frac{dy}{dt} &= x(2-x-y^2) \end{aligned}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Lösning: De kritiska punkterna ges av

$$\begin{aligned} (1-x)e^y &= 0, \\ x(2-x-y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem är ekvivalent med

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ (2-1-y^2) &= 0, \end{aligned}$$

som är ekvivalent med

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Alltså ges fixpunkterna av $(1,1)$ och $(1,-1)$. För att analysera de kritiska punkternas stabilitetsegenskaper är det lämpligt att beräkna Jacobianen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -e^y & (1-x)e^y \\ 2-2x-y^2 & -2xy \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ges de associerade egenvärdena av $-e$ och -2 (varav $(1,1)$ är en stabil kritisk punkt). Eftersom

$$J(1,-1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ges de associerade egenvärdena av $-e^{-1}$ och 2 (varav $(1,-1)$ är en instabil kritisk punkt). **Svar:** $(1,1)$ är en stabil kritisk punkt och $(1,-1)$ är en instabil kritisk punkt.

b. Det är givet att $\mathbf{0}$ är en kritisk punkt till det autonoma systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

och att det finns en lösning $\mathbf{x}$ sådan att $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ då $t \to -\infty$ och sådan att $|\mathbf{x}(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$. Är det (under dessa antaganden) möjligt att säga något om den kritiska punkten $\mathbf{0}$:s stabilitetsegenskaper?

Lösning: Det faktum att det finns en lösning som går från $\mathbf{0}$ till ∞ är en indikation på att $\mathbf{0}$ är en instabil kritisk punkt. För att bevisa detta, låt oss anta att $\mathbf{0}$ är en stabil kritisk punkt och visa att detta antagande leder till en motsägelse. Låt $\epsilon > 0$. Då finns det (enligt antagande) ett $\delta > 0$ sådant att om begynnelsevärdet är närmre origo än δ så kommer lösningen att förbli närmre origo än ϵ för all framtid. Eftersom $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ då $t \to -\infty$ så finns det ett t_0 så att $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$. Låt $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + t_0)$. Då är $\mathbf{y}$ en lösning, $\mathbf{y}(0)$ är närmre origo än δ, men $|\mathbf{y}(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$ (speciellt förblir inte lösningen närmre origo än ϵ för all framtid). Denna motsägelse visar att origo är en instabil punkt. **Svar:** Ja, origo är en instabil kritisk punkt.

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$(1 + x^2)y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

a. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform kring $x_0 = 0$.

Lösning: Eftersom $x_0 = 0$ är en ordinär punkt ansätter vi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Beräkna

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

varav

$$5xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 5n a_n x^n.$$

Vi har även

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

varav

$$(1 + x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Sammanfattningsvis kan ekvationen alltså skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n = 0.$$

Denna ekvation är ekvivalent med

$$n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 5na_n + 4a_n = 0,$$

d.v.s.

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+4n+4)a_n = 0.$$

Eftersom $(n^2+4n+4) = (n+2)^2$ kan denna likhet skrivas om till

$$a_{n+2} = -\frac{n+2}{n+1}a_n.$$

Svar:

$$a_{n+2} = -\frac{n+2}{n+1}a_n.$$

b. Ange en undre gräns för konvergensradien av motsvarande potensserielösningar.

Lösning: Ekvationen kan skrivas om till

$$y'' + \frac{5x}{1+x^2}y' + \frac{4}{1+x^2}y = 0.$$

Låt

$$p(x) = \frac{5x}{1+x^2}, \quad q(x) = \frac{4}{1+x^2}.$$

Enligt Sats 5.3.1 i boken ges en undre gräns för konvergensradien av minimum av p:s och q:s konvergensradier. Eftersom p är en kvot av polynom så ges en undre gräns för p:s konvergensradie av avståndet från 0 till närmsta nollställe till polynomet i nämnaren (i komplexa talplanet). Alltså är 1 en undre gräns för p:s konvergensradie. Argumentet för q är identiskt, varav en undre gräns för konvergensradien av potensserielösningarna är 1. **Svar:** 1.

c. Finn en fundamentalmängd av potensserielösningar till ekvationen (koefficienterna skall beräknas explicit).

Lösning: Låt oss börja med att finna en lösning svarande mot $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Då är alla udda koefficienter noll (på grund av rekursionsrelationen). Vidare har vi

$$a_2 = -\frac{2}{1}a_0, \quad a_4 = -\frac{4}{3}a_2 = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}a_0, \quad a_6 = -\frac{6}{5}a_4 = -\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}a_0.$$

I allmänhet får vi

$$a_{2n} = (-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

för $n \geq 1$ (eftersom $a_0 = 1$). Detta ger en lösning

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}.$$

Låt oss nu finna en lösning svarande mot $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Då är alla jämna koefficienter noll. Vidare har vi

$$a_3 = -\frac{3}{2}a_1, \quad a_5 = -\frac{5}{4}a_3 = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}a_1, \quad a_7 = -\frac{7}{6}a_5 = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}a_1.$$

I allmänhet får vi

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

för $n \geq 1$ (eftersom $a_1 = 1$). Detta ger en lösning

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1}.$$

Eftersom $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$ och $y_2'(0) = 1$ så är Wronskianen av y_1 och y_2 skild ifrån noll. Följdaktligen utgör y_1 och y_2 en fundamentalmängd. **Svar:**

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}, \quad y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1}.$$

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta en partikel med massa m och laddning q. Om partikeln rör sig i ett magnetfält $\mathbf{B}$ så uppfyller dess hastighet $\mathbf{v}$ ekvationen

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Antag nu att $m = 1$, $q = 1$ och att $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$. Beräkna partikelns position $\mathbf{r}$ som funktion av tiden, givet att

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0, 1, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}(0) &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

Observera att $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ och att om $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ så är

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Lösning: Låt

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z).$$

Beräkna

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y, -v_x, 0).$$

Ekvationen

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

kan alltså skrivas

$$(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = (v_y, -v_x, 0).$$

Denna ekvation kan delas upp i två bitar:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

och

$$(3) \qquad \dot{v}_z = 0.$$

Låt oss börja med att betrakta (2). Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

har egenvärden $\pm i$. Ekvationen för egenvektorer svarande mot egenvärdet i ges av

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \bar{w} = \bar{0}.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

varav en lösning ges av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Som en konsekvens av denna observation och (2) får vi slutsatsen att

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Eftersom $v_x(0) = 1$ och $v_y(0) = 0$ så får vi $v_x(t) = \cos t$ och $v_y(t) = -\sin t$. Ekvationen (3) ger i sin tur slutsatsen att v_z är konstant. Eftersom $v_z(0) = 1$ är följdaktligen $v_z(t) = 1$ för alla t. Ovanstående observationer ger slutsatsen att

$$\dot{\mathbf{r}} = (v_x, v_y, v_z) = (\cos t, -\sin t, 1),$$

varav

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t) + (a_1, a_2, a_3),$$

där a_1, a_2, a_3 är konstanter. Eftersom $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 0)$ är emellertid dessa konstanter 0. **Svar:**

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t).$$

8 (av 8) (3 poäng). a. Låt a och E vara kontinuerliga, icke-negativa funktioner på ett öppet intervall I. Antag att E är kontinuerligt deriverbar på I och att

$$(4) \qquad \left| \frac{dE}{dt}(t) \right| \leq a(t)E(t)$$

för alla $t \in I$. Visa att om $E(t_0) = 0$ för något $t_0 \in I$ så är $E(t) = 0$ för alla $t \in I$.

Lösning: Låt A vara en primitiv funktion till A. Då är A kontinuerligt deriverbar, och

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A}E\right) = -ae^{-A}E + e^{-A}\frac{dE}{dt} \leq -ae^{-A}E + ae^{-A}E = 0,$$

där det näst sista steget är en konsekvens av (4). Om vi integrerar denna olikhet från t_0 till $t_1 \in I$ (där $t_1 \geq t_0$), så får vi

$$e^{-A(t_1)}E(t_1) - e^{-A(t_0)}E(t_0) \leq 0.$$

Eftersom $E(t_0) = 0$ och $E(t_1) \geq 0$ så ger denna olikhet slutsatsen att

$$0 \leq e^{-A(t_1)}E(t_1) \leq 0,$$

varav $E(t_1) = 0$ för $t_1 \geq t_0$ sådana att $t_1 \in I$. Vi har även

$$\frac{d}{dt}\left(e^A E\right) = ae^A E + e^A \frac{dE}{dt} \geq ae^A E - ae^A E = 0.$$

Om vi integrerar denna olikhet från $t_1 \in I$ till t_0 (där $t_1 \leq t_0$), så får vi

$$e^{A(t_0)}E(t_0) - e^{A(t_1)}E(t_1) \geq 0.$$

Eftersom $E(t_0) = 0$ och $E(t_1) \geq 0$ så ger denna olikhet slutsatsen att

$$0 \leq e^{A(t_1)}E(t_1) \leq 0,$$

varav $E(t_1) = 0$ för $t_1 \leq t_0$ sådana att $t_1 \in I$. Ovanstående argument ger slutsatsen att $E(t) = 0$ för alla $t \in I$.

b. Antag att y är en två gånger kontinuerligt deriverbar lösning till

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$$

på I, där p och q är kontinuerliga funktioner på I. Visa att om

$$E = \dot{y}^2 + y^2$$

så finns det en kontinuerlig funktion a på I sådan att (4) är uppfylld.

Lösning: Beräkna

$$\frac{dE}{dt} = 2\dot{y}\ddot{y} + 2y\dot{y} = 2\dot{y}(-p\dot{y} - qy) + 2y\dot{y} = -2p\dot{y}^2 + (2 - 2q)y\dot{y}.$$

Denna likhet medför att

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leq 2|p|\dot{y}^2 + 2|1 - q||y\dot{y}|. \tag{5}$$

Eftersom

$$0 \leq (|\dot{y}| - |y|)^2 = y^2 + \dot{y}^2 - 2|y\dot{y}|$$

har vi emellertid att

$$2|y\dot{y}| \leq y^2 + \dot{y}^2 = E.$$

Om vi kombinerar denna olikhet med (5) (samt det faktum att $\dot{y}^2 \leq E$), så får vi

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leq 2|p|E + |1 - q|E = (2|p| + |1 - q|)E.$$

Med andra ord har funktionen a, definierad av

$$a(t) = 2|p(t)| + |1 - q(t)|,$$

de önskade egenskaperna.

c. Använd a- och b-delen för att visa att om g är en kontinuerlig funktion på I, $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ och $t_0 \in I$, så är lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y &= g(t), \\ y(t_0) &= y_a, \\ \dot{y}(t_0) &= y_b \end{aligned}$$

(som är två gånger kontinuerligt deriverbara på I) entydiga.

Lösning: Antag att y_1 och y_2 är två lösningar. Då uppfyller $y = y_2 - y_1$ ekvationen

$$\begin{aligned} \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y &= 0, \\ y(t_0) &= 0, \\ \dot{y}(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Låt $E = \dot{y}^2 + y^2$. Då finns det en kontinuerlig funktion a (som är icke-negativ) sådan att (4) är uppfylld (enligt b-delen). Vidare är $E(t_0) = 0$. Enligt a-delen kan vi alltså dra slutsatsen att $E(t) = 0$ för alla $t \in I$. Alltså är $y(t) = 0$ för alla $t \in I$. Denna likhet innebär att $y_1(t) = y_2(t)$ för alla $t \in I$. Alltså är lösningarna till det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet entydiga.