Tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 19 oktober 2011, kl. 8:00–13:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*
Preliminära betygsgränser:

- För betyg A: 21 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg B: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) och 19 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg C: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) och 17 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg D: 13 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 15 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg E: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 13 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg Fx: 10 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 12 poäng totalt (exklusive bonuspoäng).

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).
Examinator: Hans Ringström.

Del A

1 (av 8) (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering och med ett av de fem svarsalternativen: sant & säker, falskt & säker, sant & osäker, falskt & osäker, blankt)?

i. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 2, sådant att

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t), \\ \phi(2) &= 2 \end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

ii. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \cos(t)\dot{y}(t) + \sin(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

iii. Låt ϕ vara lösningen till

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= 1 - \phi^2(t), \\ \phi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Då gäller att

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty}\phi(t) = -1$$

(det får betraktas som givet att lösningen är unik och existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

iv. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = e^{t^2}\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och om ϕ_1 inte är identiskt lika med noll, så finns det en konstant c sådan att $\phi_2 = c\phi_1$.

v. Om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \cos(t)\dot{y}(t) + \sin(t)y(t) = e^t\cos(t^2)$$

så är $y = y_1 + y_2$ en lösning.

vi. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) + \cos(x)y'(x) + e^x y(x) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

har en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där potensserien har en konvergensradie $\rho = \infty$.

vii. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y'' + (x+1)y' + y = 0.$$

viii. Funktionen e^{t^3} är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning.

ix. Antag att A är en 2×2 matris sådan att

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}.$$

Då ges den allmänna lösningen till ekvationen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

av

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{3t}.$$

x. Det finns en unik lösning till

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix}\sin t^2 & te^{t^2}\\ \frac{1}{1+t} & \cos t\end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix}t\\ t^2e^t\end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

på intervallet $t \in (-1, 1)$.

2 (av 8) (3 poäng). Finn en implicit lösning till ekvationen

$$y' = y^2 e^x + e^x.$$

3 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

4 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(t), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-x)e^y, \\ \frac{dy}{dt} &= x(2 - x - y^2) \end{aligned}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

b. Det är givet att $\mathbf{0}$ är en kritisk punkt till det autonoma systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

och att det finns en lösning $\mathbf{x}$ sådan att $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ då $t \to -\infty$ och sådan att $|\mathbf{x}(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$. Är det (under dessa antaganden) möjligt att säga något om den kritiska punkten $\mathbf{0}$:s stabilitetsegenskaper?

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$(1 + x^2)y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

a. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform kring $x_0 = 0$.

b. Ange en undre gräns för konvergensradien av motsvarande potensserielösningar.

c. Finn en fundamentalmängd av potensserielösningar till ekvationen (koefficienterna skall beräknas explicit).

Var god vänd!

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta en partikel med massa m och laddning q. Om partikeln rör sig i ett magnetfält $\mathbf{B}$ så uppfyller dess hastighet $\mathbf{v}$ ekvationen

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Antag nu att $m = 1$, $q = 1$ och att $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$. Beräkna partikelns position $\mathbf{r}$ som funktion av tiden, givet att

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0, 1, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}(0) &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

Observera att $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ och att om $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ så är

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

8 (av 8) (3 poäng). a. Låt a och E vara kontinuerliga, icke-negativa funktioner på ett öppet intervall I. Antag att E är kontinuerligt deriverbar på I och att

$$\left|\frac{dE}{dt}(t)\right| \leq a(t)E(t) \tag{1}$$

för alla $t \in I$. Visa att om $E(t_0) = 0$ för något $t_0 \in I$ så är $E(t) = 0$ för alla $t \in I$.

b. Antag att y är en två gånger kontinuerligt deriverbar lösning till

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$$

på I, där p och q är kontinuerliga funktioner på I. Visa att om

$$E = \dot{y}^2 + y^2$$

så finns det en kontinuerlig funktion a på I sådan att (1) är uppfylld.

c. Använd a- och b-delen för att visa att om g är en kontinuerlig funktion på I, $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ och $t_0 \in I$, så är lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y &= g(t), \\ y(t_0) &= y_a, \\ \dot{y}(t_0) &= y_b \end{aligned}$$

(som är två gånger kontinuerligt deriverbara på I) entydiga.