Lösningsförslag, Tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 4 februari 2012, kl. 14:00–19:00

Del A

1 (av 8) (3 poäng). Svar:

i. sant och säker,
ii. sant och säker,
iii. sant och säker,
iv. sant och säker,
v. falskt och säker,
vi. falskt och säker,
vii. falskt och säker,
viii. sant och säker,
ix. falskt och säker,
x. falskt och säker.

2 (av 8) (3 poäng). Finn en implicit lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)\frac{dy}{dx} &= 0, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Lösningsförslag: Ekvationen kan skrivas

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

där

$$M(x,y) = (x+y)^2, \quad N(x,y) = 2xy + x^2 - 1.$$

Det är av intresse att avgöra om ekvationen är exakt. Låt oss därför beräkna

$$M_y(x,y) = 2x + 2y, \quad N_x(x,y) = 2y + 2x.$$

Tack vare Sats 2.6.1 i boken är således ekvationen exakt; $M_y = N_x$ och M, N, M_y och N_x är kontinuerliga i hela planet. Låt oss finna en funktion ψ sådan att

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = (x+y)^2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = 2xy + x^2 - 1. \tag{2}$$

Om vi integrerar (2) får vi

$$\psi(x,y) = xy^2 + x^2y - y + f(x),$$

där f är en obekant funktion av x. För att (1) skall vara uppfylld krävs nu att

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2xy + f'(x).$$

Denna likhet ger
$$f'(x) = x^2,$$
varav
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$
där C är en reell konstant. Om vi kombinerar ovanstående observationer får vi
$$\psi(x, y) = xy^2 + x^2y - y + \frac{1}{3}x^3 + C,$$
där C är en reell konstant. Vidare vet vi att y är en lösning till den ursprungliga differentialekvationen om och endast om $\psi[x, y(x)]$ är oberoende av x. Alltså vet vi att varje lösning uppfyller
$$xy^2 + x^2y - y + \frac{1}{3}x^3 = K,$$
där K är en reell konstant. I uppgiftsformuleringen söks emellertid en lösning som uppfyller $y(1) = 1$. Detta ger kravet
$$1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} = K,$$
d.v.s. $K = 4/3$. **Svar:**
$$xy^2 + x^2y - y + \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}.$$

3 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till ekvationen
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$$
för $x > 0$, givet att $y_1(x) = x$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Lösningsförslag: Eftersom vi är givna en lösning till motsvarande homogena ekvation kan det vara lämpligt att göra en ansats på formen
$$y(x) = y_1(x)u(x) = xu(x).$$
Vi får
$$y'(x) = u(x) + xu'(x), \quad y''(x) = 2u'(x) + xu''(x),$$
varav
$$\begin{aligned} x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) =& 2x^2u'(x) + x^3u''(x) - 2xu(x) - 2x^2u'(x) \\ &+ 2xu(x) = x^3u''(x). \end{aligned}$$
Följdaktligen är y en lösning till ekvationen om och endast om
$$x^3u''(x) = 2x^3.$$
Eftersom vi är intresserade av fallet $x > 0$ är alltså y en lösning till ekvationen om och endast om
$$u''(x) = 2.$$
Genom att integrera denna ekvation två gånger så får vi
$$u(x) = x^2 + C_1x + C_2,$$

där C_1 och C_2 är reella konstanter. **Svar:** Den allmänna lösningen för $x > 0$ ges av

$$y(x) = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x,$$

där C_1 och C_2 är reella konstanter.

OBS: Det finns många andra lösningsmetoder. Observera speciellt att ekvationen är en Eulerekvation.

4 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$(x^2+1)y''(x) + y(x) = 0.$$

a. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform kring $x_0 = 0$.

Lösningsförslag: Vi söker lösningar på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Notera att

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Observera även att

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Ovanstående räkningar ger

$$\begin{aligned}(x^2+1)y''(x) + y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n + a_n] x^n.\end{aligned}$$

Följdaktligen är ekvationen uppfylld om och endast om

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n + a_n = 0$$

för alla $n \geq 0$. Denna likhet kan omformuleras till

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = -(n^2 - n + 1) a_n.$$

Svar: Rekursionsrelationen ges av

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - n + 1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

för alla heltal $n \geq 0$.

b. Ange en undre gräns för konvergensradien av motsvarande potensserielösningar.

Lösningsförslag: Observera att $x_0 = 0$ är en ordinär punkt till differentialekvationen. Vidare kan ekvationen skrivas

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

där $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = 0$ och $R(x) = 1$. Enligt Sats 5.3.1 i boken ges en undre gräns för konvergensradien av minimum av konvergensradierna av $p = Q/P$ och $q = R/P$. Eftersom $p = 0$ räcker det att fokusera på

$$q(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Eftersom q är en kvot av polynom så ges en undre gräns för q:s konvergensradie av avståndet från $x_0 = 0$ till närmsta nollställe till polynomet i nämnaren (i komplexa talplanet). Eftersom de närmsta nollställena till $x^2 + 1$ ges av $\pm i$ så ges en undre gräns av 1. **Svar:** 1.

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till ekvationssystemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösningsförslag: För att finna den allmänna lösningen behöver vi finna två linjärt oberoende lösningar. Om vi gör en ansats

$$\mathbf{x}(t) = \bar{v}e^{\lambda t},$$

där $\bar{v}$ är en konstant vektor och λ är ett tal, så får vi slutsatsen att λ måste vara ett egenvärde och $\bar{v}$ en motsvarande egenvektor. Låt oss alltså börja med att finna egenvärdena till

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Följdaktligen ges egenvärdena av $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. Egenvektorerna svarande mot $\lambda_1 = 1$ ges av ekvationen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{v} = 0.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

är en lösning till ekvationen. Egenvektorerna svarande mot $\lambda_2 = -1$ ges av ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{v} = 0.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

och

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

är en lösning till ekvationen. Eftersom Wronskianen av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är skild ifrån noll så utgör de en fundamentalmängd. **Svar:**

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

där c_1 och c_2 är rella konstanter.

b. Finn en partikulärlösning till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Lösningsförslag: För att finna en partikulärlösning, ansätt

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t),$$

där Φ är en fundamentalmatris till motsvarande linjära system. Då uppfyller $\mathbf{x}$ ekvationen om och endast om

$$\Phi(t)\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Enligt lösningen till a-delen ges en fundamentalmatris av

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Följdaktligen vill vi ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t}(e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t}) \\ e^t[e^t + e^{-t} - (e^t - e^{-t})] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} t + C_1 \\ t + C_2 \end{pmatrix},$$

där C_1 och C_2 är rella konstanter. Eftersom vi enbart söker en partikulärlösning kan vi sätta dessa konstanter till noll. Detta ger en partikulärlösning

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$t \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

c. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösningsförslag: Eftersom partikulärlösningen vi konstruerade i b-delen uppfyller ekvationen samt begynnelsevillkoren så utgör den (via entydighetsdelen av existens och entydighetssatsen) svaret även på denna fråga. **Svar:**

$$t \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) + \int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi &= tu_1(t), \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

för $t \geq 0$, där

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 1 \\ 0 & t < 1. \end{cases}$$

Lösningsförslag: Det kan vara lämpligt att Laplacetransformera ekvationen. Eftersom integralen svarar mot en faltning av t med $y(t)$ så ges Laplacetransformen av vänsterledet av

$$sY(s) + \frac{1}{s^2}Y(s) = \frac{s^3+1}{s^2}Y(s).$$

Eftersom

$$tu_1(t) = u_1(t) + (t-1)u_1(t)$$

så ges Laplacetransformen av högerledet av

$$\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{s+1}{s^2}e^{-s}.$$

Genom att Laplacetransformera ekvationen får vi alltså

$$\frac{s^3+1}{s^2}Y(s) = \frac{s+1}{s^2}e^{-s},$$

varav

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^3+1}e^{-s}.$$

Observera att -1 är ett nollställe både till polynomet i nämnaren och polynomet i täljaren. Följdaktligen kan det vara lämpligt att genomföra polynomdivisionen

$$\frac{s^3+1}{s+1} = s^2 - s + 1;$$

kontroll:

$$(s^2 - s + 1)(s+1) = s^3 - s^2 + s + s^2 - s + 1 = s^3 + 1.$$

Notera även att

$$s^2 - s + 1 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Vi får

$$Y(s) = \frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}e^{-s}.$$

Å andra sidan vet vi (via BETA) att

$$\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

Om vi använder BETA återigen får vi sedan **svar:**

$$\frac{2}{\sqrt{3}}e^{(t-1)/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}(t-1)}{2}\right)u_1(t).$$

7 (av 8) (3 poäng). Låt I vara ett öppet intervall, $t_0 \in I$ och q, f vara kontinuerliga funktioner på I. Ge ett fullständigt bevis (utan hänvisningar till BETA/boken) av följande påstående: Givet ett reellt tal ϕ_0 finns det en unik kontinuerligt deriverbar lösning ϕ (definierad på I) till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) + q(t)\phi(t) &= f(t), \\ \phi(t_0) &= \phi_0. \end{aligned}$$

Lösningsförslag: Låt Q vara en primitiv funktion till q sådan att $Q(t_0) = 0$; d.v.s., låt

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} q(s)ds.$$

Observera att Q är kontinuerligt deriverbar. Låt oss beräkna

$$\frac{d}{dt}\left(e^Q\phi\right) = qe^Q\phi + e^Q\dot{\phi} = e^Q(\dot{\phi} + q\phi).$$

Följdaktligen är ϕ en kontinuerligt deriverbar lösning till begynnelsevärdesproblemet om och endast om

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^Q\phi\right) &= e^Q f, \\ \phi(t_0) &= \phi_0. \end{aligned}$$

Å andra sidan är detta begynnelsevärdesproblem uppfyllt om och endast om

$$e^{Q(t)}\phi(t) - \phi_0 = \int_{t_0}^{t} e^{Q(s)} f(s)ds$$

för alla $t \in I$. Å andra sidan är denna ekvation ekvivalent med

$$\phi(t) = e^{-Q(t)}\phi_0 + \int_{t_0}^{t} e^{Q(s)-Q(t)} f(s)ds. \tag{3}$$

Slutsatsen är alltså att ϕ är kontinuerligt deriverbar och uppfyller det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet om och endast om ϕ uppfyller (3). Låt oss nu bevisa entydighet. Givet två kontinuerligt deriverbara lösningar till det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet så måste båda uppfylla (3). Eftersom högerledet är givet i termer av ϕ_0, t_0, q och f så måste lösningarna följdaktligen vara lika (detta bevisar entydighet). Låt oss nu bevisa existens. Definiera ϕ via (3). Då är ϕ kontinuerligt deriverbar. Vidare uppfyller ϕ det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet. Alltså finns det en lösning. Detta bevisar existens.

8 (av 8) (3 poäng). Låt x_0 och y_0 vara reella tal sådana att $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ och $x_0^2 + y_0^2 < 1$. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xe^{x^2+y^2}(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= -ye^{x^2+y^2}(1 - x^2 - y^2), \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

där det får betraktas som givet att lösningen är unik, existerar för alla t och är sådan att $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ för alla t. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{t\to\infty}[x(t), y(t)], \quad \lim_{t\to-\infty}[x(t), y(t)].$$

Lösningsförslag: Observera att $0 < x^2(t) + y^2(t) < 1$ för alla t. Skälet till detta är att origo och enhetscirkeln består av fixpunkter till ekvationen; $x^2(t_0) + y^2(t_0) = 0$ för något t_0 innebär att $x(t) = y(t) = 0$ för alla t och analogt om $x^2(t_0) + y^2(t_0) = 1$ för något t_0. Eftersom vi får anta att x och y alltid är positiva är följdaktligen högerleden i ekvationen alltid skilda från noll. Vi kan därför byta variabel från t till x och vi får

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y}{x}.$$

Eftersom x och y alltid är positiva kan vi multiplicera med $1/y$:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Genom att integrera denna ekvation med avseende på x får vi

$$\ln\frac{y(t)}{y(0)} = \ln\frac{x(t)}{x(0)},$$

d.v.s.

$$\frac{y(t)}{y_0} = \frac{x(t)}{x_0},$$

varav

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0}x(t). \tag{4}$$

Om vi sätter in denna information i den första ekvationen får vi slutsatsen att

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\,x\exp\left(x^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2\right)\left(1-x^2-\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2\right)\\ &= -\,x\exp\left(x^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2\right)\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^2}\left(\frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}-x^2\right).\end{aligned}$$

Observera att detta är en autonom ekvation med fixpunkter i 0 och i

$$\frac{x_0}{(x_0^2+y_0^2)^{1/2}},$$

men inga fixpunkter däremellan. Vidare ligger startvärdet mellan dessa fixpunkter och x är strikt avtagande på motsvarande intervall. Följdaktligen får vi slutsatsen att

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0, \quad \lim_{t\to-\infty}x(t)=\frac{x_0}{(x_0^2+y_0^2)^{1/2}}.$$

På grund av (4) får vi även

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0, \quad \lim_{t\to-\infty}y(t)=\frac{y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{1/2}}.$$

Svar:

$$\lim_{t\to\infty}[x(t),y(t)]=(0,0), \quad \lim_{t\to-\infty}[x(t),y(t)]=\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{1/2}}(x_0,y_0).$$

OBS: Det finns många andra lösningsmetoder. En möjlighet är att byta till polära koordinater. En annan är att introducera Liapunovfunktionen

$$V(x,y) = x^2+y^2.$$