TENTAMEN, DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1, FÖR CTFYS2 OCH CMEDT3, SF1629, DEN 4 FEBRUARI 2012, KL. 14:00–19:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*
Preliminära betygsgränser:

- För betyg A: 21 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg B: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) och 19 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg C: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) och 17 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg D: 13 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 15 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg E: 11 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 13 poäng totalt (exklusive bonuspoäng),
- För betyg Fx: 10 poäng på A-delen (inklusive bonuspoäng) eller 12 poäng totalt (exklusive bonuspoäng).

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).
Examinator: Hans Ringström.

DEL A

1 (av 8) (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering och med ett av de fem svarsalternativen: sant & säker, falskt & säker, sant & osäker, falskt & osäker, blankt)?

i. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{2/3}(t),\\ \phi(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på I.

ii. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^5 + y}{x^2 + 1}$$

är separabel.

iii. Funktionen $\phi(t) = 0$ är en instabil lösning till ekvationen

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \left[1 + e^{\phi(t)}\right] \sin(\phi(t)).$$

iv. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) så är även

$$\phi_3 = 2(\phi_2 - \phi_1) + \phi_1$$

en lösning.

v. Om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + e^{t^2}\dot{y}(t) + e^t y(t) = \cos(t)$$

så är $y = y_1 - y_2$ en lösning till samma ekvation.

vi. Antag att y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + e^{t^2}\dot{y}(t) + e^t y(t) = 0.$$

Om $y_1(t_0) \neq 0$ för något t_0 så finns det en konstant c sådan att $y_2 = cy_1$.

vii. Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^5}$$

har konvergensradie $1/5$.

viii. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y'' + x^2y' + y = 0.$$

ix. Givet två kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0, \infty)$, låt $f * g$ beteckna funktionen h definierad av

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

För en godtycklig kontinuerlig funktion f definierad på $[0, \infty)$ gäller då att $f * 2 = 2f$.

x. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

är stabil om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ gäller att varje lösning $\mathbf{x}$ till (1) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < 2\epsilon$$

för alla $t \geq 0$.

2 (av 8) (3 poäng). Finn en implicit lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)\frac{dy}{dx} &= 0,\\ y(1) &= 1.\end{aligned}$$

3 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$$

för $x > 0$, givet att $y_1(x) = x$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

4 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$(x^2+1)y''(x) + y(x) = 0.$$

a. Finn rekursionsrelationen för lösningar på potensserieform kring $x_0 = 0$.

b. Ange en undre gräns för konvergensradien av motsvarande potensserielösningar.

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till ekvationssystemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

b. Finn en partikulärlösning till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

c. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix},\\ \mathbf{x}(0) &= 0.\end{aligned}$$

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}y'(t) + \int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi &= tu_1(t),\\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

för $t \geq 0$, där

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 1 \\ 0 & t < 1. \end{cases}$$

7 (av 8) (3 poäng). Låt I vara ett öppet intervall, $t_0 \in I$ och q, f vara kontinuerliga funktioner på I. Ge ett fullständigt bevis (utan hänvisningar till BETA/boken) av följande påstående: Givet ett reellt tal ϕ_0 finns det en unik kontinuerligt deriverbar lösning ϕ (definierad på I) till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) + q(t)\phi(t) &= f(t), \\ \phi(t_0) &= \phi_0. \end{aligned}$$

OBS: En utförlig motivering krävs.

8 (av 8) (3 poäng). Låt x_0 och y_0 vara reella tal sådana att $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ och $x_0^2 + y_0^2 < 1$. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xe^{x^2+y^2}(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= -ye^{x^2+y^2}(1 - x^2 - y^2), \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

där det får betraktas som givet att lösningen är unik, existerar för alla t och är sådan att $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ för alla t. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{t\to\infty} [x(t), y(t)], \quad \lim_{t\to-\infty} [x(t), y(t)].$$