Lösningsförslag, tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 15 oktober 2012, kl. 8:00–13:00

Del A

1 (av 8) (3 poäng).

Lösning:

i. falskt och säker,
ii. sant och säker,
iii. sant och säker,
iv. sant och säker,
v. sant och säker,
vi. falskt och säker,
vii. sant och säker,
viii. sant och säker,
ix. falskt och säker,
x. sant och säker.

2 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= \delta(t-1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösningsförslag: Laplacetransformering av ekvationen ger (givet begynnelsevillkoren)

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = e^{-s},$$

där Y är Laplacetransformen av y. Division med $s^2 + 2s + 2$ ger

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 1}.$$

Enligt L46, sid 333, i BETA gäller att

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\sin t.$$

Genom att kombinera denna observation med L4, sid 331, i BETA så får vi
Svar:

$$y(t) = e^{-(t-1)}\sin(t-1)u_1(t).$$

3 (av 8) (3 poäng). Finn de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -3y - x - x^3 \end{aligned}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Lösningsförslag: De kritiska punkterna ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= y, \\ 0 &= -3y - x - x^3. \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem är ekvivalent med

$$\begin{aligned} 0 &= y, \\ 0 &= x + x^3. \end{aligned}$$

Eftersom den enda reella lösningen till ekvationen $x^3 + x = 0$ ges av $x = 0$ så är $(0, 0)$ den enda kritiska punkten. Låt

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -3y - x - x^3 \end{pmatrix}.$$

Då ges den associerade Jacobimatrisen av

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3x^2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Följdaktligen gäller att

$$J_{\mathbf{f}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till denna matris ges av ekvationen

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Med andra ord ges egenvärdena av

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}.$$

Båda dessa egenvärden är negativa. Följdaktligen är $(0, 0)$ en asymptotiskt stabil kritisk punkt. **Svar:** $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten och den är asymptotiskt stabil.

4 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösningsförslag: Egenvärdena till

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Vi har alltså ett upprepat egenvärde $\lambda = 3$. Egenvektorerna svarande mot detta egenvärde ges av ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{v} = 0.$$

En egenvektor ges alltså av

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges alltså av

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

För att finna en andra lösning, ansätt

$$\mathbf{x}_2(t) = \bar{v}_1 t e^{\lambda t} + \bar{v}_2 e^{\lambda t}.$$

För att denna funktion skall vara en lösning krävs att

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{v}_1 &= \lambda \bar{v}_1, \\ \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \bar{v}_2 &= \bar{v}_1. \end{aligned}$$

Följdaktligen kan vi välja $\bar{v}_1 = \bar{v}$, $\lambda = 3$; då är den första ekvationen uppfylld. Den andra ekvationen blir då

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan alltså välja

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En andra lösning ges alltså av

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Eftersom Wronskianen av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ i $t = 0$ är skild ifrån noll, så är $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ en fundamentalmängd. **Svar:** Den allmänna lösningen ges av

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} \right],$$

där c_1 och c_2 är reella konstanter.

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till

$$t y'' - (1+t) y' + y = 0$$

för $t > 0$, givet att $y_1(t) = e^t$ är en lösning.

Lösningsförslag: Ansätt, för att hitta en andra lösning,

$$y(t) = y_1(t) u(t) = e^t u(t).$$

Då gäller att

$$y' = e^t u + e^t u', \quad y'' = e^t u + 2e^t u' + e^t u''.$$

Om vi sätter in denna information i ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} 0 =& t(e^t u + 2e^t u' + e^t u'') - (1+t)(e^t u + e^t u') + e^t u \\ =& te^t u + 2te^t u' + te^t u'' - e^t u - e^t u' - te^t u - te^t u' + e^t u \\ =& te^t u'' + te^t u' - e^t u'. \end{aligned}$$

Om vi låter $w = u'$ och delar med te^t (observera att $t > 0$), så får vi

$$w' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) w = 0.$$

En primitiv funktion till faktorn framför w ges av $t - \ln t$. En integrerande faktor ges alltså av

$$\mu(t) = t^{-1} e^t.$$

Beräkna

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-1} e^t w\right) = t^{-1} e^t w' - t^{-2} e^t w + t^{-1} e^t w = t^{-1} e^t \left[w' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) w\right].$$

Alltså uppfyller y ekvationen om och endast om det finns en konstant c_0 så att

$$u'(t) = w(t) = c_0 t e^{-t}.$$

Denna likhet är ekvivalent med

$$u(t) = \int c_0 t e^{-t} dt = -c_0 t e^{-t} + \int c_0 e^{-t} = -c_0 t e^{-t} - c_0 e^{-t} + c_2.$$

Vi får

$$y(t) = e^t u(t) = -c_0(t+1) + c_2 e^t.$$

Speciellt är $t + 1$ en andra lösning till ekvationen. **Svar:** Den allmänna lösningen ges av

$$c_1(t+1) + c_2 e^t,$$

där c_1 och c_2 är reella konstanter.

b. Finn den allmänna lösningen till

$$ty'' - (1+t)y' + y = t^2 e^t$$

för $t > 0$, givet att $y_1(t) = e^t$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Lösningsförslag: Antingen kan man använda metoder av ovanstående typ, eller så kan man använda parametervariation. Om man använder parametervariation så är det viktigt att först skriva om ekvationen på standardform, d.v.s.

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y' + \frac{1}{t} y = te^t.$$

Låt $y_1 = e^t$ och $y_2(t) = t + 1$ och ansätt

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2.$$

Om u_1 och u_2 uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix},$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix},$$

så är y då en lösning. Lösningen till det senare systemet ges av

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{e^t - (t+1)e^t} \begin{pmatrix} 1 & -(t+1) \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{te^t} \begin{pmatrix} -(t+1)te^t \\ te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Integration ger en lösning

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t \\ -e^t \end{pmatrix},$$

varav en partikulärlösning ges av

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) e^t - (t+1)e^t = \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) e^t.$$

Svar: Den allmänna lösningen ges av

$$c_1 e^t + c_2(t+1) + \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) e^t,$$

där c_1 och c_2 är reella konstanter.

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Visa att $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2 y'' + 2xy' - xy = 0.$$

Bestäm även indexekvationen och rötterna till indexekvationen.

Lösningsförslag: Ekvationen är på formen

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

där $P(x) = x^2$, $Q(x) = 2x$ och $R(x) = -x$. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt om $xQ(x)/P(x)$ och $x^2R(x)/P(x)$ är analytiska i $x_0 = 0$. Emellertid har vi att

$$x\frac{Q(x)}{P(x)} = x\frac{2x}{x^2} = 2, \quad x^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2\frac{-x}{x^2} = -x.$$

Eftersom högerleden båda är analytiska i $x_0 = 0$ så är $x_0 = 0$ en reguljär singulär punkt. För att beräkna indexekvationen, låt

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = 2, \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = 0.$$

Indexekvationen ges av

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0.$$

I vårt fall ges den alltså av

$$r^2 + r = 0.$$

Observera att denna ekvation har rötterna $r = 0$ och $r = -1$. **Svar:** Indexekvationen är $r^2 + r = 0$ och rötterna till indexekvationen ges av $r = 0$ och $r = -1$.

b. Finn rekursionsrelationen svarande mot den större av rötterna till indexekvationen. Beräkna även koefficienterna explicit om $a_0 = 1$.

Lösningsförslag: Den större roten till indexekvationen ges av $r = 0$. Vi söker därför en lösning till ekvationen på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Då blir

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Speciellt har vi alltså

$$2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n.$$

Vi har även

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

varav

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Notera slutligen att

$$-xy(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Ekvationen kan alltså skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0.$$

Vi måste dela upp denna likhet i två delar. När $n = 0$ får vi kravet att

$$0 \cdot (0-1) a_0 + 2 \cdot 0 \cdot a_0 = 0.$$

Emellertid är det klart att detta villkor är uppfyllt. För $n \geq 1$ har vi kravet

$$n(n-1) a_n + 2n a_n - a_{n-1} = 0.$$

Denna likhet kan skrivas

$$n(n+1) a_n = a_{n-1},$$

d.v.s.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} a_{n-1}.$$

Om $a_0 = 1$ så får vi

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad a_2 = \frac{1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2)}, \quad a_3 = \frac{1}{3! \cdot 4!}.$$

Det verkar alltså rimligt att göra induktionsantagandet

$$a_n = \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

För $n = 0$ stämmer detta antagande. Antag att det stämmer för n. Då får vi

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{n!(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!(n+2)!},$$

där den första likheten är en konsekvens av rekursionsrelationen och den andra likheten är en konsekvens av induktionsantagandet. Följdaktligen stämmer induktionsantagandet för alla $n \geq 0$. **Svar:** Rekursionsrelationen ges av

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} a_{n-1}$$

och om $a_0 = 1$ så ges a_n av

$$a_n = \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen för en pendel (utan friktion)

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

där $\omega > 0$ är en konstant. Skriv om ekvationen som ett första ordningens system och bevisa att den kritiska punkten till detta system som svarar mot $\theta = \dot{\theta} = 0$ är en stabil kritisk punkt.

Lösningsförslag: Beviset av detta påstående står att finna i boken; se exempel 2, sid 548.

8 (av 8) (3 poäng). Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1 - |v|v, \\ v(0) &= -1. \end{aligned}$$

a. Beskriv lösningens beteende för $t \geq 0$.

Lösningsförslag: Låt $f(v) = 1 - |v|v$. Observera att $\dot{v} = f(v)$ är en autonom ekvation. Vidare finns det bara en kritisk punkt: $v = 1$. Slutligen är $f(v) > 0$ för $v < 1$ och $f(v) < 0$ för $v > 1$. Eftersom v initialt är negativ så växer v och konvergerar mot 1 då $t \to \infty$. **Svar:** Lösningen växer monotont från startvärdet -1 och konvergerar mot 1 då $t \to \infty$.

b. Beräkna en explicit lösning till begynnelsevärdesproblemet för $t \geq 0$.

Lösningsförslag: Eftersom begynnelsevärdet är -1 så är det rimligt att börja med att lösa

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1 + v^2, \\ v(0) &= -1. \end{aligned}$$

Denna lösning kommer att vara relevant så länge $v \leq 0$. Observera att ekvationen är separabel, och att

$$\frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Integration från 0 till t ger

$$\arctan[v(t)] - \arctan(-1) = t.$$

Eftersom $\arctan(-1) = -\pi/4$ får vi $\arctan[v(t)] = t - \pi/4$, d.v.s.

$$v(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Denna lösning är relevant för $0 \leq t \leq \pi/4$. Vid $t = \pi/4$ övergår emellertid v från att vara negativ till att vara positiv. För att beräkna lösningen för $t \geq \pi/4$ måste vi alltså lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1 - v^2, \\ v(\pi/4) &= 0. \end{aligned}$$

Även i detta fall är den relevanta ekvationen separabel och vi har

$$\frac{1}{1-v^2}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Följdaktligen har vi (för $t \geq \pi/4$) att

$$\begin{aligned} t - \frac{\pi}{4} = \int_0^{v(t)} \frac{1}{1-v^2} dv &= \int_0^{v(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right) dv \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln[1 - v(t)] + \ln[1 + v(t)]\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v(t)}{1-v(t)}, \end{aligned}$$

där vi har använt oss av partialbråksuppdelning i andra steget. Följdaktligen gäller att

$$\frac{1+v(t)}{1-v(t)} = e^{2(t-\pi/4)},$$

varav

$$1 + v(t) = e^{2(t-\pi/4)} - e^{2(t-\pi/4)}v(t),$$

en ekvation som kan omformuleras till

$$(1 + e^{2(t-\pi/4)})v(t) = e^{2(t-\pi/4)} - 1.$$

Vi får, slutligen,

$$\begin{aligned} v(t) =& \frac{e^{2(t-\pi/4)} - 1}{1 + e^{2(t-\pi/4)}} = \frac{e^{t-\pi/4} - e^{-(t-\pi/4)}}{e^{t-\pi/4} + e^{-(t-\pi/4)}} \\ =& \frac{2\sinh(t-\pi/4)}{2\cosh(t-\pi/4)} = \tanh(t-\pi/4) \end{aligned}$$

för $t \geq \pi/4$. **Svar:**

$$v(t) = \begin{cases} \tan(t-\pi/4) & 0 \leq t \leq \pi/4, \\ \tanh(t-\pi/4) & t \geq \pi/4. \end{cases}$$