TENTAMEN, DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1, FÖR CTFYS2 OCH CMEDT3, SF1629, DEN 15 OKTOBER 2012, KL. 8:00–13:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*
Preliminära betygsgränser:

- För betyg A: 22 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg B: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **och** 20 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg C: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **och** 18 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg D: 13 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 15 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg E: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 13 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg Fx: 10 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 12 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]).

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).
Examinator: Hans Ringström.

DEL A

1 (av 8) (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering och med ett av de fem svarsalternativen: sant & säker, falskt & säker, sant & osäker, falskt & osäker, blankt)?

i. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 5, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t), \\ \phi(5) &= 0 \end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

ii. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 4 \end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

iii. Ekvationen

$$2y\cos(xy) + 2x\cos(xy)y' = 0$$

är exakt.

iv. Låt ϕ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= e^{\phi^2(t)}\sin(\phi(t)),\\ \phi(0) &= -\pi/2.\end{aligned}$$

Då gäller att

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t) = -\pi, \quad \lim_{t\to-\infty}\phi(t) = 0$$

(det får betraktas som givet att lösningen är unik och existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

v. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och c_1, c_2 är två reella tal, så är $\phi_3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ en lösning till

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}(t) = f(t)\phi(t).$$

vi. Det finns reella konstanter b och c sådana att $y(t) = t\cos t$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

vii. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}$$

är konvergent.

viii. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(1+x^2)y''(x) + \sin(2x)y'(x) + \cos(3x)y(x) &= 0,\\ y(0) &= 1,\\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där potensserien har en konvergensradie $\rho \geq 1$.

ix. Givet två kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0,\infty)$, låt $f * g$ beteckna funktionen h definierad av

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

För en godtycklig kontinuerlig funktion f definierad på $[0,\infty)$ gäller då att $1 * f = f$.

x. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

är stabil om och endast om det för varje $r > 0$ finns ett $s > 0$ sådant att varje lösning $\mathbf{x}$ till (1) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < s$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < r$$

för alla $t \geq 0$.

2 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= \delta(t-1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Som motivering kan nämnas att begynnelsevärdesproblemet svarar mot en pendel (där utslagsvinkeln antas vara liten) som initialt är i vila, men som får en stöt vid $t = 1$.

3 (av 8) (3 poäng). Finn de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -3y - x - x^3 \end{aligned}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

4 (av 8) (3 poäng). Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till

$$ty'' - (1+t)y' + y = 0$$

för $t > 0$, givet att $y_1(t) = e^t$ är en lösning.

b. Finn den allmänna lösningen till

$$ty'' - (1+t)y' + y = t^2 e^t$$

för $t > 0$, givet att $y_1(t) = e^t$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Visa att $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y'' + 2xy' - xy = 0.$$

Bestäm även indexekvationen och rötterna till indexekvationen.

b. Finn rekursionsrelationen svarande mot den större av rötterna till indexekvationen. Beräkna även koefficienterna explicit om $a_0 = 1$.

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen för en pendel (utan friktion)

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0,$$

där $\omega > 0$ är en konstant. Skriv om ekvationen som ett första ordningens system och bevisa att den kritiska punkten till detta system som svarar mot $\theta = \dot{\theta} = 0$ är en stabil kritisk punkt.

8 (av 8) (3 poäng). Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1 - |v|v, \\ v(0) &= -1. \end{aligned}$$

a. Beskriv lösningens beteende för $t \geq 0$.

b. Beräkna en explicit lösning till begynnelsevärdesproblemet för $t \geq 0$.

Som motivering kan nämnas att ekvationen beskriver hastigheten hos en boll som rör sig i ett konstant gravitationsfält, med ett luftmotstånd som är proportionellt mot hastigheten i kvadrat. Begynnelsevillkoret skall tolkas som att bollen ursprungligen rör sig uppåt, med fart 1.