Lösningsförslag, tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 8 januari 2013, kl. 14:00–19:00

Del A

1 (av 8) (3 poäng).

i. Sant och säker.
ii. Falskt och säker.
iii. Sant och säker.
iv. Sant och säker.
v. Sant och säker.
vi. Sant och säker.
vii. Sant och säker.
viii. Sant och säker.
ix. Sant och säker.
x. Falskt och säker.

2 (av 8) (3 poäng). Finn alla implicita lösningar till ekvationen

$$2x + 4xy + (1 + 2x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Lösningsförslag: Ekvationen kan skrivas

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

där

$$M(x, y) = 2x + 4xy, \quad N(x, y) = 1 + 2x^2 + 3y^2.$$

Det är av intresse att avgöra om ekvationen är exakt. Låt oss därför beräkna

$$M_y(x, y) = 4x, \quad N_x(x, y) = 4x.$$

Tack vare Sats 2.6.1 i boken är således ekvationen exakt; $M_y = N_x$ och M, N, M_y och N_x är kontinuerliga i hela planet. Låt oss finna en funktion ψ sådan att

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = 2x + 4xy, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = 1 + 2x^2 + 3y^2. \tag{2}$$

Om vi integrerar (2) får vi

$$\psi(x, y) = y + 2x^2y + y^3 + f(x),$$

där f är en obekant funktion av x. För att (1) skall vara uppfylld krävs nu att

$$4xy + f'(x) = M(x, y) = 2x + 4xy.$$

Denna likhet ger

$$f'(x) = 2x,$$

varav

$$f(x) = x^2 + C,$$

där C är en reell konstant. Om vi kombinerar ovanstående observationer får vi

$$\psi(x, y) = y + 2x^2y + y^3 + x^2 + C,$$

där C är en reell konstant. Vidare vet vi att y är en lösning till den ursprungliga differentialekvationen om och endast om $\psi[x, y(x)]$ är oberoende av x. Alltså vet vi att varje lösning uppfyller

$$y + 2x^2y + y^3 + x^2 = K,$$

där K är en reell konstant. **Svar:**

$$y + 2x^2y + y^3 + x^2 = K,$$

där K är en reell konstant.

3 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' - y &= f(t), \\ y'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t \geq 1, \\ 0 & t < 1. \end{cases}$$

Lösningsförslag: Det kan vara lämpligt att Laplacetransformera ekvationen. Vi får

$$s^2Y(s) - Y(s) = F(s), \tag{3}$$

där Y betecknar Laplacetransformen av y och F betecknar Laplacetransformen av f. För att kunna beräkna F kan det vara lämpligt att notera att

$$f(t) = e^t u_1(t) = e \cdot e^{(t-1)} u_1(t).$$

Enligt BETA (formel L.4, sid. 331) får vi slutsatsen att

$$F(s) = e\frac{e^{-s}}{s-1}.$$

Eftersom $s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$ så medför följdaktligen (3) att

$$Y(s) = e\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-1)(s+1)} = e\frac{e^{-s}}{(s-1)^2(s+1)}.$$

För att kunna inverstransformera så kan det vara lämpligt att partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} = \frac{A(s+1) + B(s+1)(s-1) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+1)}.$$

Krav:

$$A(s+1) + B(s+1)(s-1) + C(s-1)^2 = 1.$$

Detta krav är ekvivalent med ekvationerna

$$B + C = 0, \quad A - 2C = 0, \quad A - B + C = 1.$$

Detta ekvationssystem kan, i sin tur, formuleras om till

$$B = -C, \quad A = 2C, \quad 4C = 1.$$

Följdaktligen gäller att $A = 1/2$, $B = -1/4$ och $C = 1/4$. Med andra ord så gäller att

$$Y(s) = \frac{e}{2}\frac{e^{-s}}{(s-1)^2} - \frac{e}{4}\frac{e^{-s}}{s-1} + \frac{e}{4}\frac{e^{-s}}{s+1}.$$

Inverstransformering (se L.4, L.21 och L.22 i BETA) ger **Svar:**

$$y(t) = \frac{e}{4}\left[2(t-1)e^{t-1} - e^{t-1} + e^{-(t-1)}\right] u_1(t).$$

4 (av 8) (3 poäng). a. Finn och karakterisera de kritiska punkterna till ekvationen

$$x' = (1-x^2)(e^x + e^{-x}).$$

Lösningsförslag: De kritiska punkterna ges av ekvationen

$$(1-x^2)(e^x + e^{-x}) = 0.$$

Eftersom den andra faktorn i vänsterledet alltid är skild ifrån noll så ges de kritiska punkterna av ekvationen $1-x^2 = 0$. De kritiska punkterna är alltså ± 1. Eftersom högerledet i ekvationen är positivt då $x \in (-1, 1)$ och negativt då $x \in (1, \infty)$ och då $x \in (-\infty, -1)$ så får vi slutsatsen att $x = 1$ är en stabil och $x = -1$ en instabil kritisk punkt. **Svar:** De kritiska punkterna är $x = 1$ (stabil) och $x = -1$ (instabil).

b. Skissera lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x' &= (1-x^2)(e^x + e^{-x}), \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösningsförslag: Skissen bör innehålla följande element: $x(0) = 0$, x är en strikt växande funktion, $x(t) \to 1$ då $t \to \infty$ och $x(t) \to -1$ då $t \to -\infty$.

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösningsförslag: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Låt oss börja med att beräkna matrisen A:s egenvärden. De ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25 + 9 = \lambda^2 - 16.$$

Egenvärdena ges följdaktligen av $\lambda = \pm 4$. Egenvektorer svarande mot $\lambda = 4$ ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

En motsvarande egenvektor ges följdaktligen av

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och en lösning till ekvationen ges av

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Egenvektorer svarande mot $\lambda = -4$ ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

En motsvarande egenvektor ges följdaktligen av

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

och en lösning till ekvationen ges av

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t}.$$

Eftersom Wronskianen av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ ges av

$$\det \begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ e^{4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

så vet vi att $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ utgör en fundamentalmängd. Följdaktligen får vi **Svar:** den allmänna lösningen ges av

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t},$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

b. Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Lösningsförslag: Från a-delen av uppgiften vet vi att

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ e^{4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}$$

är en fundamentalmatris. Det är därför lämpligt att göra ansatsen

$$\mathbf{x}_p = \Phi \mathbf{u}$$

för att finna en partikulärlösning. Observera att

$$\mathbf{x}_p' = \Phi' \mathbf{u} + \Phi \mathbf{u}' = A\mathbf{x}_p + \Phi \mathbf{u}'.$$

Följdaktligen uppfyller $\mathbf{x}_p$ den relevanta ekvationen om och endast om

$$\Phi \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Denna ekvation är ekvivalent med

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{4t} & 3e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Integration ger

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter. Eftersom vi enbart söker en partikulärlösning så kan vi emellertid välja $c_1 = c_2 = 0$. Detta ger

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ e^{4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t}.$$

Svar: den allmänna lösningen ges av

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t},$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Finn en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}$$

(där a_n och r är reella konstanter) till ekvationen

$$(x^2 + 2x + 1)y''(x) + (4x^2 + 9x + 5)y'(x) + (4x + 3)y(x) = 0.$$

Lösningen skall vara sådan att $a_0 = 1$ och koefficienterna a_n, $n \geq 0$ skall beräknas explicit.

Lösningsförslag: Notera att ekvationen kan skrivas

$$(x+1)^2 y''(x) + [4(x+1)^2 + (x+1)]y'(x) + [4(x+1) - 1]y(x) = 0.$$

Notera att

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r-1}$$

och att

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x+1)^{n+r-2}.$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} [4(x+1) - 1]y(x) &= 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1} (x+1)^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}. \end{aligned}$$

Vidare gäller att

$$\begin{aligned} [4(x+1)^2 + (x+1)]y'(x) &= 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4(n-1+r) a_{n-1} (x+1)^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x+1)^{n+r}. \end{aligned}$$

Slutligen har vi att

$$(x+1)^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x+1)^{n+r}.$$

Ekvationen kan alltså skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x+1)^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}4(n-1+r)a_{n-1}(x+1)^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x+1)^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}(x+1)^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^{n+r}=0.$$

Vi måste dela upp likheten i fallen $n=0$ och $n\geq 1$. För $n=0$ så får vi

$$r(r-1)a_0+ra_0-a_0=0.$$

För att vi skall kunna få en lösning med $a_0=1$ måste vi alltså ha $r^2-1=0$. Låt oss välja $r=1$. För $n\geq 1$ så får vi då kravet att

$$(n+1)na_n+4na_{n-1}+(n+1)a_n+4a_{n-1}-a_n=0.$$

Denna ekvation är ekvivalent med

$$[(n+1)^2-1]a_n=-4(n+1)a_{n-1}.$$

Vi får

$$a_n=-4\frac{n+1}{(n+1)^2-1}a_{n-1}=-4\frac{n+1}{n^2+2n}a_{n-1}=-4\frac{n+1}{n(n+2)}a_{n-1}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}a_1&=-4\frac{2}{1\cdot 3}a_0,\\ a_2&=(-4)^2\frac{3\cdot 2}{(2\cdot 1)(4\cdot 3)}a_0,\end{aligned}$$

etc. Det är naturligt att göra induktionsantagandet att

$$a_n=(-4)^n\frac{2(n+1)!}{n!(n+2)!}a_0;$$

denna likhet gäller för $n=0,1,2$. Om antagandet gäller för n, så får vi att

$$a_{n+1}=-4\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}(-4)^n\frac{2(n+1)!}{n!(n+2)!}a_0=(-4)^{n+1}\frac{2(n+2)!}{(n+1)!(n+3)!}a_0.$$

Följdaktligen är induktionsantagandet sant för alla n. Eftersom vi vill ha $a_0=1$ så får vi
Svar: en lösning som uppfyller kraven ges av

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{2(n+1)!}{n!(n+2)!}(x+1)^{n+1}.$$

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$\ddot{x}+x^3=0.$$

Skriv om ekvationen som ett första ordningens system. Är den kritiska punkten till detta system som svarar mot $x=\dot{x}=0$ en stabil kritisk punkt?

Lösningsförslag: Introducera variablerna $x_1=x$ och $x_2=\dot{x}$. Då kan ekvationen sammanfattas av systemet

$$\dot{x}_1=\dot{x}=x_2,\quad \dot{x}_2=\ddot{x}=-x^3=-x_1^3,$$

d.v.s. av systemet

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{4}$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3. \tag{5}$$

Med dessa variabler så är origo den fixpunkt som svarar mot $x = \dot{x} = 0$. Detta system är sådant att man inte kan avgöra stabilitet/instabilitet via linjärisering. Det är därför lämpligt att söka en Liapunovfunktion. Ett sätt att finna en Liapunovfunktion är att finna en bevarad energi. I vårt fall kan man göra det genom att multiplicera den ursprungliga ekvationen med $\dot{x}$. Detta ger

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}x^3 = 0.$$

Observera att denna ekvation kan skrivas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}x^4\right) = 0.$$

Följdaktligen är

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}x^4$$

en bevarad kvantitet. Låt oss därför definiera

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^4.$$

Notera att W är positivt definit (i hela planet) och att

$$\dot{W}(x_1, x_2) = \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \cdot (-x_1^3) = x_1^3 x_2 + x_2(-x_1^3) = 0.$$

Med andra ord så är $\dot{W}$ negativt semidefinit (i hela planet). Eftersom W är oändligt deriverbar och origo är en isolerad kritisk punkt till systemet (4)–(5) så är Sats 9.6.1 i boken tillämpbar, och vi får slutsatsen att origo är en stabil kritisk punkt. **Svar:** Ja, det är en stabil kritisk punkt.

8 (av 8) (3 poäng). För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar (reellvärd) lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y' &= y^{1/5}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

på I? För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det inte ett sådant öppet intervall?

Lösningsförslag: Låt $f(x, y) = y^{1/5}$. Om punkten (x_0, y_0) är sådan att f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga i en rektangel med (x_0, y_0) i sitt inre, så finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till begynnelsevärdesproblemet på I; jämför med Sats 2.4.2, sidan 70. Eftersom den aktuella funktionen f är kontinuerlig och kontinuerligt deriverbar för $y \neq 0$ får vi slutsatsen att för alla (x_0, y_0) sådana att $y_0 \neq 0$ så finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar lösning y till begynnelsevärdesproblemet på I. Om $y_0 = 0$ är satsen emellertid inte tillämpbar. Därmed är emellertid inte sagt att det inte finns ett öppet intervall med de önskade egenskaperna om $y_0 = 0$. För att visa att det inte finns ett öppet intervall måste vi konstruera motexempel. Om $y_0 = 0$ får vi direkt en lösning, given av $y_a(x) = 0$. Vi måste nu konstruera en annan lösning. Detta kan man göra t.ex. genom att utnyttja det faktum att ekvationen är separabel. Låt

$$y_b(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}(x - x_0)\right)^{5/4} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0. \end{cases}$$

Då är även y_b en lösning (jämför med Exempel 3, sidan 71-72 i boken); speciellt så är y_b kontinuerligt deriverbar. Oavsett hur litet öppet intervall I (som innehåller x_0) man väljer så kommer y_a vara skild ifrån y_b i någon punkt i I. Om $y_0 = 0$ finns det alltså inte ett öppet intervall med de önskade egenskaperna. **Svar:** Om $y_0 \neq 0$ så finns det ett öppet intervall med de önskade egenskaperna, men om $y_0 = 0$ finns det inte ett sådant intervall.