Tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 1, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 8 januari 2013, kl. 14:00–19:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*
Preliminära betygsgränser:

- För betyg A: 22 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg B: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **och** 20 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg C: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **och** 18 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg D: 13 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 15 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg E: 11 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 13 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]),
- För betyg Fx: 10 poäng på A-delen (inklusive A-bonuspoäng) **eller** 12 poäng totalt (inklusive B-bonuspoäng [men ej A-bonuspoäng]).

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för uppgift 1).
Examinator: Hans Ringström.

Del A

1 (av 8) (3 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall *i detta problem* anges utan motivering och med ett av de fem svarsalternativen: sant & säker, falskt & säker, sant & osäker, falskt & osäker, blankt)?

i. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(1+t^2)\frac{d\phi}{dt}(t) &= e^{-t^3}\phi(t)+\sin(t^2),\\ \phi(1) &= 2\end{aligned}$$

har en unik lösning ϕ definierad för alla $t \in (-\infty, \infty)$.

ii. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t)+2\sin(t)\dot{y}(t)+\cos(t)y(t) &= 0,\\ y(0) &= 2\end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

iii. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx+2y}{x^2+2}$$

är separabel.

iv. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där g inte är identiskt lika med noll. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är även $2\phi_2 - \phi_1$ en lösning.

v. Om $y_1(t) = \sin t$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0,$$

där b och c är reella konstanter, så är även $y_2(t) = 2\cos t$ en lösning.

vi. Låt p och q vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$. Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 1, \\ \dot{y}(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

och y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 4, \\ \dot{y}(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

Det får betraktas som givet att y_1 och y_2 är definierade på I. Då utgör y_1 och y_2 en fundamentalmängd av lösningar till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0$$

på intervallet I.

vii. Punkten $x_0 = 1$ är en ordinär punkt till

$$(x^2+1)y'' + xy' + x^4y = 0.$$

viii. Funktionen $\sin(e^{t^2})$ är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning (exponential order).

ix. Om

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en lösning till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

där A är en 2×2 matris, så är $\det(A) = 0$.

x. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

är stabil om och endast om det finns ett $\xi > 0$ och ett $\delta > 0$ sådana att varje lösning $\mathbf{x}$ till (1) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \xi$$

för alla $t \geq 0$.

2 (av 8) (3 poäng). Finn alla implicita lösningar till ekvationen

$$2x + 4xy + (1 + 2x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

3 (av 8) (3 poäng). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'' - y &= f, \\ y'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

där

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t \geq 1, \\ 0 & t < 1. \end{cases}$$

4 (av 8) (3 poäng). a. Finn och karakterisera de kritiska punkterna till ekvationen

$$x' = (1 - x^2)(e^x + e^{-x}).$$

b. Skissera lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x' &= (1 - x^2)(e^x + e^{-x}), \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

5 (av 8) (4 poäng). a. Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

b. Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Del B

6 (av 8) (3 poäng). Finn en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+r}$$

(där a_n och r är reella konstanter) till ekvationen

$$(x^2 + 2x + 1)y''(x) + (4x^2 + 9x + 5)y'(x) + (4x + 3)y(x) = 0.$$

Lösningen skall vara sådan att $a_0 = 1$ och koefficienterna a_n, $n \geq 0$ skall beräknas explicit.

7 (av 8) (3 poäng). Betrakta ekvationen

$$\ddot{x} + x^3 = 0.$$

Skriv om ekvationen som ett första ordningens system. Är den kritiska punkten till detta system som svarar mot $x = \dot{x} = 0$ en stabil kritisk punkt?

8 (av 8) (3 poäng). För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det ett öppet intervall I innehållande x_0 och en unik kontinuerligt deriverbar (reellvärd) lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y' &= y^{1/5}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

på I? För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns det inte ett sådant öppet intervall?