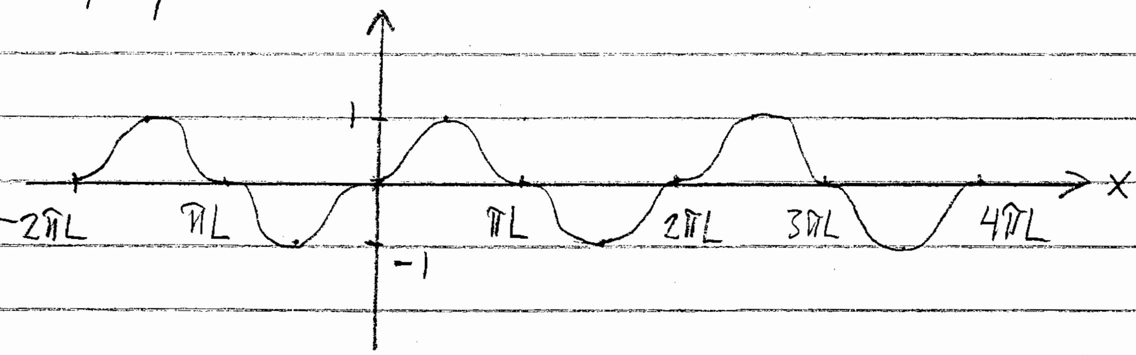
Förslag till lösningar till tentamensskrivning 2005-01-12

i 5B1202/2, Diff. och Trans. II, del 2

1

$\sin^5 x$ har period 2π och $\sin^5 \frac{x}{L}$ har period $2\pi L$

och följande graf:



Vi betraktar först fallet $L = 1$ dvs $f(x) = \sin^5 x$

Vi har $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ och $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

vilket ger $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$$\therefore \sin^5 x = (\sin^2 x)(\sin^3 x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\therefore 8\sin^5 x = 3\sin x - \sin 3x - 3\sin x\cos 2x + \sin 3x\cos 2x$$

Formeln $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$ ger

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(-\sin x + \sin 3x)$$

och $\sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x)$

$\because\ 8\sin^5 x = 3\sin x - \sin 3x - 3\cdot\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) +$

$+\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) = 5\sin x - \frac{5}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 5x$

$\therefore$

$f(x) = \sin^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x$ vilket är Fourierserien för f.

För $L \neq 1$ ersätt x med $\frac{x}{L}$ i ovanstående formel så fås

$$f(x) = \sin^5\frac{x}{L} = \frac{5}{8}\sin\frac{x}{L} - \frac{5}{16}\sin\frac{3x}{L} + \frac{1}{16}\sin\frac{5x}{L}$$

vilket är Fourierserien för f

2

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$ och $\begin{cases} a_{n+1} + b_n = 2 \\ a_n - b_{n+1} = 1 \end{cases}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$

Låt $(a_n)_0^\infty$ ha Z-transform $A(z)$ och $(b_n)_0^\infty$ Z-transform $B(z)$. Z-transformering ger

$$\begin{cases} z\left(A(z) - a_0\right) + B(z) = \dfrac{2z}{z-1} \\ A(z) - z\left(B(z) - b_0\right) = \dfrac{z}{z-1} \end{cases}$$

och $\begin{cases} zA(z) + B(z) = \dfrac{2z}{z-1} \\ A(z) - zB(z) + z = \dfrac{z}{z-1} \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} z\,A(z) + B(z) = \dfrac{2z}{z-1} \\ A(z) - z\,B(z) = \dfrac{z}{z-1} - z = \dfrac{2z - z^2}{z-1} \end{cases}$$

Den första ekvationen kan skrivas: $z^2 A(z) + z\,B(z) = \dfrac{2z^2}{z-1}$

och vi adderar detta till den andra ekvationen och får

$$(z^2+1)\,A(z) = \frac{z^2+2z}{z-1} \qquad \text{dvs. } A(z) = \frac{z(z+2)}{(z^2+1)(z-1)}$$

Vi gör partialbråksuppdelning

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{z+2}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{Kz+L}{z^2+1} + \frac{M}{z-1}$$

Man får

$$\begin{cases} K = -\frac{3}{2} \\ L = -\frac{1}{2} \\ M = \frac{3}{2} \end{cases}$$

och

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{-\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}}{z^2+1} + \frac{\frac{3}{2}}{z-1}$$

$$\therefore A(z) = -\frac{3}{2}\,\frac{z^2}{z^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{z}{z^2+1} + \frac{3}{2}\,\frac{z}{z-1}$$

Invers Z-transformering ger enligt BETA

$$a_n = -\frac{3}{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{3}{2}$$

Härav fås

$$\begin{cases} a_{4k} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \\ a_{4k+1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ a_{4k+2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \\ a_{4k+3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Formeln $b_{n+1} = a_n - 1$ ger sedan

$$\begin{cases} b_{4k} = 1 \\ b_{4k+1} = -1 \\ b_{4k+2} = 0 \\ b_{4k+3} = 2 \end{cases} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

3

Betrakta Legendrepolynomen $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ och $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Vi skall minimera $\|f - q\|^2$ då $q \in S$ där S är det delrum av $L^2(-1,1)$ som spänns upp av P_0, P_1 och P_2. P_0, P_1 och P_2 är ortogonala i $L^2(-1,1)$ och lösningen ges av $q = q_0 =$ ortogonala proj. av $f(x)$ på S.

$$\therefore \quad q_0 = \sum_0^2 \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|^2} P_k$$

där $(f, P_k) = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\,dx$ och $\|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}$.

Vi har $\|P_0\| = 2$, $\|P_1\|^2 = \frac{2}{3}$, $\|P_2\|^2 = \frac{2}{5}$ och

$$(f, P_0) = \int_{-1}^{1} |x|^3\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$(f, P_1) = \int_{-1}^{1} |x|^3 x\,dx = 0 \quad \text{ty } |x|^3 x \text{ udda}$$

$$(f, P_2) = \int_{-1}^{1} |x|^3 \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \int_0^1 x^3(3x^2-1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (3x^5 - x^3)\,dx = \left[3\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ q_0 = \frac{(f, P_0)}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{(f, P_2)}{\|P_2\|^2} P_2 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} \tfrac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4} + \frac{5}{16}(3x^2-1) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{15}{16}x^2 - \frac{5}{16} = \underline{\underline{\frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}}}$$

4

Vi har $f * e^{-|x|} = (1+|x|)\,e^{-|x|} = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$ (*)

$e^{-|x|}$ har Fouriertransform $\frac{2}{1+\omega^2}$

och $|x|e^{-|x|}$ — " — $\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$ enligt BETA.

Fouriertransformering av (*) ger

$$\hat{f}(\omega)\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$$

$\therefore$

$$\hat{f}(\omega) = 1 + \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Invers Fouriertransformering ger $f(x) = e^{-|x|}$

5

Vi har $f(t) = \dfrac{t^4}{t^2+1} = \dfrac{t^4-1}{t^2+1} + \dfrac{1}{t^2+1}$

$\dfrac{1}{t^2+1}$ har Fouriertransform $\pi e^{-|\omega|}$ enligt BETA

och $\dfrac{t^4-1}{t^2+1} = \dfrac{(t^2+1)(t^2-1)}{t^2+1} = t^2-1$

t^2-1 har Fouriertransform $-2\pi\delta''(\omega) - 2\pi\delta(\omega)$ enl. BETA.

$\therefore$ $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|} - 2\pi\delta''(\omega) - 2\pi\delta(\omega)$

6

Problemet är
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) - u'(\pi) = 0 \quad \text{dvs} \quad u(\pi) = u'(\pi) \end{cases}$$

Karakt. ekv. $m^2 + \lambda = 0$ dvs $m^2 = -\lambda$

1) $\lambda = 0$: $m = 0$ och $u = Cx + D$

$u(0) = 0$ ger $D = 0$ dvs $u = Cx$ och $u' = C$

$\therefore \; C\pi = C$ vilket ger $C = 0$

2) $\lambda > 0$: Sätt $\lambda = \mu^2$ där $\mu > 0$

Kar. ekv. $m^2 = -\mu^2$ ger $m = \pm i\mu$

och $u = A\cos\mu x + B\sin\mu x$

$0 = u(0) = A \implies u = B\sin\mu x$

$\therefore \; u' = B\mu\cos\mu x$

$u(\pi) = u'(\pi)$ ger $B\sin\mu\pi = B\mu\cos\mu\pi$ dvs

$$\tan\mu\pi = \mu$$

Denna ekv. har lösningar $\mu = \mu_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ där

$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$

Det givna problemet har därför lösningar

$\varphi_n(x) = \sin\mu_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

3) $\lambda < 0$: Sätt $\lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$

Kar. ekv. $m^2 = \mu^2$ med rötter $m = \pm\mu$

Man får $u = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

$u(0) = 0$ ger $0 = A + B$ och $B = -A$

$\therefore \; u = Ae^{\mu x} - Ae^{-\mu x}$

och $u' = A\mu e^{\mu x} + A\mu\, e^{-\mu x}$

Man får $u(\pi) = Ae^{\mu\pi} - Ae^{-\mu\pi}$ och

$$u'(\pi) = A\mu e^{\mu\pi} + A\mu\, e^{-\mu\pi}$$

$u(\pi) = u'(\pi) \Longrightarrow e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} = \mu e^{\mu\pi} + \mu\, e^{-\mu\pi} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \mu = \tanh \mu\pi$$

Denna ekv. har en positiv rot $\mu = \mu_0$

Motsvarande lösning till det ursprungliga problemet

är $\varphi_0(x) = \sinh \mu_0 x$

Enligt Sturm-Liouvilles sats utgör $(\varphi_n)_0^\infty$ ett

fullständigt ortogonalsystem i $L^2(0,\pi)$.

7

Det givna problemet är

$$P \begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \; 0 \le y \le \pi \\ u(x,0) = u(0,y) = 0 \\ u(x,\pi) = \sin 3x \\ u(\pi, y) = \sin 3y \end{cases}$$

Vi skall studera problemen P_1 och P_2 där

$$P_1 \begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi \\ u(x,0) = u(0,y) = 0 \\ u(x,\pi) = \sin 3x \\ u(\pi, y) = 0 \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi \\ u(x,0) = u(0,y) = 0 \\ u(x,\pi) = 0 \\ u(\pi,y) = \sin 3y \end{cases}$$

Om u_1 lösning till P_1 och u_2 lösning till P_2 så är

$u = u_1 + u_2$ lösning till P.

Vi löser först P_1. Vi sätter $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ och får

$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$ vilket ger $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$

Man får $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ och $\begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$

Problemet för X har icke-triviala lösningar för $\lambda = n^2$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$, och lösningarna är $X_n(x) = \sin nx$

Problemet för Y har motsvarande lösningar

$Y_n(y) = Ae^{ny} + Be^{-ny}$ och $Y(0) = 0$ ger $A + B = 0$

och $B = -A$

$\therefore \quad Y_n(y) = Ae^{ny} - Ae^{-ny}$ och vi får

$$X_n(x)\,Y_n(y) = A_n \sin nx \left(e^{ny} - e^{-ny}\right)$$

$\therefore$ $u(x,y) = \sum_1^\infty A_n \left(e^{ny} - e^{-ny}\right) \sin nx$ uppfyller första, andra och fjärde ekvationen i problemet P_1. Den tredje ekvationen ger

$$u(x,\pi) = \sum_1^\infty A_n \left(e^{n\pi} - e^{-n\pi}\right) \sin nx = \sin 3x$$

Detta är uppfyllt om $A_n = 0$ för $n \neq 3$ och

$$A_3\left(e^{3\pi} - e^{-3\pi}\right) = 1 \quad \text{dvs} \quad A_3 = \frac{1}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}$$

Man får därför lösn. $u(x,y) = \dfrac{e^{3y} - e^{-3y}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3x$ till problemet P_1

På samma sätt fås lösn. $u(x,y) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3y$ till problemet P_2

Det givna problemet P har därför lösningen

$$u = \frac{e^{3y} - e^{-3y}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3x + \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3y$$