Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202, DEL II
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER FÖR F2, T2 , (E)
3 POÄNG
Onsdagen den 12 januari, 2005, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Formelsamlingen BETA
Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Ange hur många poäng du fått tillgodoräknat under kursen (högst 4 poäng). För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5, 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Skissera grafen till den periodiska funktionen

$$f(x) = \sin^5 \frac{x}{L}, \quad L > 0.$$

Utveckla f i trigonometrisk Fourierserie (reell eller komplex).

(5 p)

2. Finn talen a_n och b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, om $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ och

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_n = 2 \\ a_n - b_{n+1} = 1 \end{cases}$$

där $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(5 p)

3. Låt $f(x) = |x|^3$. Finn det polynom $q = q_0$ av högst grad 2, som approximerar f bäst i $L^2(-1, 1)$, dvs. som minimerar

$$||f - q||^2 = \int_{-1}^{1} |f(x) - q(x)|^2 \, dx.$$

(5 p)

Var god vänd!

4. Finn en lösning till integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-|y|}\,dy = (1+|x|)e^{-|x|}.$$

(5 p)

5. Sök Fouriertransformen i distributionsmening av funktionen

$$f(t) = \frac{t^4}{t^2+1}.$$

(5 p)

6. Bestäm ett fullständigt (komplett) ortogonalsystem i $L^2(0,\pi)$, som består av lösningar till Sturm-Liouville-problemet

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < \pi; \qquad u(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0.$$

7. Lös Laplace's differentialekvation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i området $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, med randvillkoren

$$\begin{cases} u(x,0) = u(0,y) = 0 \\ u(x,\pi) = \sin 3x \\ u(\pi,y) = \sin 3y. \end{cases}$$

(6p)