# Lösningsförslag till Tentamensskrivning i 5B1202 Differentialekvationer och Transformer II, del 2, tisdagen den 30 augusti 2005

*Uppgift 1.* Då $f$ är jämn är Fourierkoefficienterna $b_n = 0$ och

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos(nx)dx = (\text{BETA s. } 124) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\sin(x-nx)+\sin(x+nx))dx$$

och en partiell integration ger

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\Big[x\Big(-\frac{\cos(1-n)x}{1-n} - \frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Big)\Big]_0^\pi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\frac{\cos(1-n)x}{1-n} + \frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Big)dx \\
&= -\frac{\cos(n-1)\pi}{1-n} - \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} \\
&= -\cos((n+1)\pi)\,\frac{n+1+1-n}{(1-n)(n+1)} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2-1}
\end{aligned}$$

för $n \neq 1$. För $n = 1$ fås

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos 2x}{2}x\Big]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}(-\cos 2\pi)\pi = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Fourierserien blir

$$1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2-1}\cos nx$$

ty $a_0 = 2$. Serien konvergerar mot $f(x)$ för alla $x$, ty $f$ är kontinuerlig och styckvis deriverbar. □

*Uppgift 2.* Vi inför inre produkten

$$(g,h) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}e^{-x^2}dx$$

i rummet $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Vi har då

$$||g||^2 = (g,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 e^{-x^2}dx$$

och

$$||f-p||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-p(x)|^2 e^{-x^2}dx.$$

Låt $S$ beteckna det delrum av $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ som består av polynom av grad högst 1. Hermitepolynomen

$$H_0(x) = 1 \quad \text{och} \quad H_1(x) = 2x$$

utgör en ortogonal bas för $S$ och $p$ skall väljas som den ortogonala projektionen av $f$ på $S$ dvs

$$p = \frac{(x^2, H_0)H_0}{\|H_0\|^2} + \frac{(x^2, H_1)H_1}{\|H_1\|^2}.$$

Vi har

$$(x^2, H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, 2x\, e^{-x^2}\, dx = 0$$

ty $x^3 e^{-x^2}$ är en udda funktion. Dessutom är $\|H_0\|^2 = \sqrt{\pi}$ och en partiell integration ger

$$\begin{aligned}(x^2, H_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, x\, dx \\ &= \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}x\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Härav följer

$$p(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}.$$

□

*Uppgift 3.* $Z$-transformering av $6a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n = 1$ ger

$$6z^2 A(z) - 5zA(z) + A(z) = \frac{z}{z-1}$$

ty $a_0 = a_1 = 0$ och

$$A(z)(6z^2 - 5z + 1) = \frac{z}{z-1}.$$

Vi har

$$(6z^2 - 5z + 1) = (2z-1)(3z-1) = 6\Big(z - \frac{1}{2}\Big)\Big(z - \frac{1}{3}\Big)$$

och får

$$A(z) = \frac{z}{6(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{6(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3/2}{z-\frac{1}{3}}$$

och man får

$$A(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{3}}.$$

Invers $Z$-transformering ger

$$a_n = \frac{1}{2} - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1}{2} - 2^{1-n} + \frac{1}{2}3^{1-n}$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$. □

*Uppgift 4.* Vi har

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{1} e^{-(1+i\omega)t}dt + \int_{-1}^{0} e^{(1-i\omega)t}dt \\
&= \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-1}^0 \\
&= -\frac{1}{1+i\omega}(e^{-(1+i\omega)} - 1) + \frac{1}{1-i\omega}(1 - e^{-(1-i\omega)}) \\
&= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-1}e^{-i\omega}}{1+i\omega} - \frac{e^{-1}e^{i\omega}}{1-i\omega} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2} - \frac{1}{e}\frac{(1-i\omega)e^{-i\omega} + (1+i\omega)e^{i\omega}}{1+\omega^2} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2} - \frac{1}{e}\frac{2\cos\omega + i\omega 2i\sin\omega}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2} - \frac{1}{e}\frac{2\cos\omega - 2\omega\sin\omega}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

för $\omega \in \mathbb{R}$. Härav fås

$$\omega\widehat{f}(\omega) = \frac{2\omega}{1+\omega^2} - \frac{\omega}{e}\frac{2\cos\omega - 2\omega\sin\omega}{1+\omega^2}$$

och

$$|\omega\widehat{f}(\omega)| \leq 1 + |\omega|\frac{2+2|\omega|}{1+\omega^2} = 1 + \frac{2|\omega|}{1+\omega^2} + \frac{2\omega^2}{1+\omega^2} \leq 1+1+2 = 4$$

ty $2a/(1+a^2) \leq 1$ för $a > 0$. $\square$

*Uppgift 5.* Vi har

$$\begin{aligned}
f * e^{-x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(x-y)^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(x^2-2xy+y^2)}dy \\
&= e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy = 0
\end{aligned}$$

för alla $x$. Fouriertransformering ger

$$\widehat{f}(\omega)\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} = 0$$

ty $e^{-x^2}$ har transform $\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$. Härav följer $\widehat{f}(\omega) = 0$ för alla $\omega$. Enligt Fouriers inversionsformel är då $f(x) = 0$ för alla $x$. $\square$

*Uppgift 6.* Vi har

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 8x, & x > 1 \end{cases}$$

där $f'(x)$ betecknar derivatan av $f$ i punkten $x$. Definiera en funktion $g$ genom

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 8x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Definitionen av derivata i distributionsmening ger för $\varphi \in \mathcal{S}$ att

$$\begin{aligned}
f'(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} (-1)\varphi'(x)dx - \int_0^1 x^4\varphi'(x)dx - \int_1^{\infty} 4x^2\varphi'(x)dx \\
&= (\text{partiell integration}) = \varphi(0) - [\varphi(x)x^4]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\,4x^3dx - [\varphi(x)\,4x^2]_1^{\infty} \\
&\quad + \int_1^{\infty} \varphi(x)\,8x\,dx = \varphi(0) - \varphi(1) + 4\varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \\
&= \varphi(0) + 3\varphi(1) + g(\varphi) = \delta(\varphi) + 3\delta_1(\varphi) + g(\varphi).
\end{aligned}$$

Härav följer att $f' = \delta + 3\delta_1 + g$ där $f'$ är derivatan i distributionsmening av $f$. □

*Uppgift 7.* Vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$. Värmeledningsekvationen ger

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

och

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Man får

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{och} \quad T' + \lambda T = 0.$$

Problemet för $X$ har icke-triviala lösningar för $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, och lösningarna är

$$X_n(x) = B_n \sin nx.$$

Problemet för $T$ har motsvarande lösningar

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

och

$$u(x,t) = \sum_1^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

uppfyller $u_{xx} = u_t$ och det första randvillkoret. Det andra randvillkoret ger

$$u(x,0) = \sum_1^{\infty} A_n \sin nx = 5\sin 3x + 2\sin 4x.$$

Detta är uppfyllt om $A_3 = 5$, $A_4 = 2$ och övriga $A_n = 0$. Lösningen blir därför

$$u(x,t) = 5e^{-9t}\sin 3x + 2e^{-16t}\sin 4x.$$

□