

Institutionen för Matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 2

Tisdagen den 30 augusti 2005, kl. 8.00-13.00

Hjälpmedel: Formelsamlingen BETA

Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Antag att funktionen f har period 2π och att $f(x) = x \sin x$ för $-\pi \leq x \leq \pi$. Beräkna Fourierserien för f . För vilka reella x konvergerar Fourierserien mot $f(x)$?

(5 p)

2. Sätt $f(x) = x^2$ för $x \in \mathbb{R}$. Bestäm det polynom p av grad högst 1 som minimerar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - p(x)|^2 e^{-x^2} dx.$$

(5 p)

3. Bestäm en talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sådan att $a_0 = a_1 = 0$ och

$$6a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n = 1$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$

(5 p)

Var god vänd!

4. Definiera en funktion f på $\mathbb{R}$ genom

$$f(t) = \begin{cases} e^{-|t|}, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Beräkna Fouriertransformen $\widehat{f}$ av f . Visa att det finns en konstant C sådan att

$$|\omega \widehat{f}(\omega)| \leq C$$

för alla reella ω .

(5 p)

5. Antag att f är kontinuerlig och tillhör $L^1(\mathbb{R})$. Antag också att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} e^{2xy} dy = 0$$

för alla reella x . Visa att $f(x) = 0$ för alla reella x .

(6 p)

6. Sätt

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x^4, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Beräkna derivatan i distributionsmening av f .

(5 p)

7. Lös värmeledningsekvationen

$$u_{xx} = u_t$$

i området $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, med randvillkoren

$$\begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 5 \sin 3x + 2 \sin 4x. \end{cases}$$

(5p)