Institutionen för Matematik, KTH
Per Sjölin

# *Lösningsförslag till*
## TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Lördagen den 14 januari 2006, kl 14.00–19.00

**1.** Då $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ fås $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ och $1 + \sin^2 x = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Härav följer att $1 + \sin^2 x$ har Fourierserien

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Vi har $f(x) = 1 + \sin^2 x - g(x)$, där $g(x) = |x|$ för $|x| \leq \pi$. Låt $g$ ha Fourierkoefficienterna

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Eftersom $g$ är jämn, är $b_n = 0$ och

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Man får

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

och för $n \geq 1$ fås med partiell integration

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}x\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x = 0 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ jämnt,} \\ -4/\pi n^2 & \text{om } n \text{ udda.} \end{cases} \end{aligned}$$

Härav följer att $g$ har Fourierserien

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ udda}}} \frac{4}{\pi n^2}\cos nx$$

och $f$ har Fourierserien

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ udda}}} \frac{4}{\pi n^2}\cos nx = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \sum_{\substack{n\geq 3 \\ n \text{ udda}}} \frac{4}{\pi n^2}\cos nx.$$

**2.** Låt följden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ha $z$-transformen $A(z)$. Då har följden $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ $z$-transformen $z(A(z)-3)$ ty $a_0=3$, och $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$ $z$-transformen $z^2(A(z)-3-20/z)$ ty $a_0=3$ och $a_1=20$. Sambandet $a_{n+2}=14a_{n-1}-48a_n$ ger då

$$z^2\left(A(z)-3-\frac{20}{z}\right)=14z(A(z)-3)-48A(z)$$

och härav följer $A(z)(z^2-14z+48)=3z^2-22z$ och

$$A(z)=z\frac{3z-22}{(z-6)(z-8)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$A(z)=z\left(\frac{2}{z-6}+\frac{1}{z-8}\right)=2\frac{z}{z-6}+\frac{z}{z-8}.$$

Invers $z$-transformering ger sedan $a_n=2\cdot 6^n+8^n, n=0,1,2,\ldots$.

**3.** Vi inför den inre produkten

$$(f,g)=\int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\mathrm{d}x$$

i rummet $L^2((0,\infty),e^{-x})$. Då fås

$$||f||^2=(f,f)=\int_0^{\infty}|f(x)|^2e^{-x}\mathrm{d}x \;\text{ och }\; ||e^{x/3}-p(x)||^2=\int_0^{\infty}|e^{x/3}-p(x)|^2e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Vi skall alltså minimera $||e^{x/3}-p(x)||$ då $p\in S$, där $S$ är det linjära delrum som spänns upp av funktionerna 1 och $x$. Laguerrepolynomen $L_0(x)=1$ och $L_1(x)=1-x$ utgör en ON-bas i $S$. $p$ skall därför väljas som ortogonala projektionen av $e^{x/3}$ på $S$, d v s $p(x)=(e^{x/3},L_0)L_0(x)+(e^{x/3},L_1)L_1(x)$. Vi har

$$\begin{aligned}
(e^{x/3},L_0)&=\int_0^{\infty}e^{x/3}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x=\left[-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}\right]_0^{\infty}=\frac{3}{2}\\
(e^{x/3},L_1)&=\int_0^{\infty}e^{x/3}(1-x)e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{-\frac{2}{3}x}(1-x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}e^{-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}e^{-\frac{2}{3}x}x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-I,
\end{aligned}$$

där

$$I=\int_0^{\infty}e^{-\frac{2}{3}x}x\mathrm{d}x=\left[-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}x\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}.$$

Härav följer $(e^{x/3},L_1)=3/2-9/4=-3/4$. Lösningen är alltså

$$p(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}(1-x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x.$$

**4.** Enligt *BETA* gäller $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ och

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{4} 2\pi e^{-|\omega|/2} = \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|/2} \quad \text{ty} \quad g(x) = \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1/4+x^2}.$$

Då $f$ och $g$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$, gäller att $f * g$ också tillhör $L^1(\mathbb{R})$ och

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|/2} = \frac{\pi^2}{2}e^{-\frac{3}{2}|\omega|}.$$

Uppenbarligen gäller $\widehat{f * g} \in L^2(\mathbb{R})$. Av Plancherels formel följer sedan att $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.

**5.** Vi har

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \\ 4x^3, & x > 2, \end{cases}$$

där $f'(x)$ betecknar derivatan av $f$ i punkten $x$. Definiera en funktion $g$ genom

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2, \\ 4x^3, & x \ge 2. \end{cases}$$

Definitionen av derivata i distributionsmening ger för $\varphi \in \mathscr{S}$ att

$$\begin{aligned}
f'(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{0} x^3\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 (x+1)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 x^4\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix}\text{partiell} \\ \text{integration}\end{matrix}\right\} \\
&= -[x^3\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 3x^2\varphi(x)\mathrm{d}x - [(x+1)\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x)\mathrm{d}x - [x^4\varphi(x)]_2^\infty \\
&\quad + \int_2^\infty 4x^3\varphi(x)\mathrm{d}x = -3\varphi(2) + \varphi(0) + 2^4\varphi(2) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \varphi(0) + 13\varphi(2) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \delta(\varphi) + 13\delta_2(\varphi) + g(\varphi).
\end{aligned}$$

Härav följer att $f' = \delta + 13\delta_2 + g$, där $f'$ är derivatan i distributionsmening av $f$.

**6.** Vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. För $r = 1$ gäller $u = \cos^2\theta + \sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \sin\theta$. Då funktionerna $r^n \cos n\theta$ och $r^n \sin n\theta$ är harmoniska för $n = 0, 1, 2, \ldots$, följer att lösningen till Dirichlets problem är $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + r\sin\theta$ och man får

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta + y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y \quad \text{för } x^2 + y^2 \le 1.
\end{aligned}$$

**7.** Vi sätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$ och Laplaces ekvation övergår i

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \text{och} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Man får

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{och} \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Problemet för $X$ har icke-triviala lösningar för $\lambda = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$, och lösningarna är $X_n(x) = \sin nx$. Problemet för $Y$ har motsvarande lösningar $Y_n(y) = C_n e^{ny} + D_n e^{-ny}$, där $C_n$ och $D_n$ är konstanter. Om vi sätter

$$u(x,y) = \sum_1^\infty (C_n e^{ny} + D_n e^{-ny}) \sin nx,$$

uppfyller $u$ ekvationen $\Delta u = 0$ och randvillkoren $u(0,y) = y(\pi,y) = 0$. De båda övriga randvillkoren ger

$$u(x,0) = \sum_1^\infty (C_n + D_n) \sin nx = 0$$

och

$$u(x,1) = \sum_1^\infty (C_n e^n + D_n e^{-n}) \sin nx = f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \sin nx.$$

Konstanterna $C_n$ och $D_n$ skall därför uppfylla

$$\begin{cases} C_n + D_n = 0 \\ C_n e^n + D_n e^{-n} = \frac{1}{n^4} \end{cases},$$

vilket ger

$$\begin{cases} C_n = \frac{1}{n^4} \frac{1}{e^n - e^{-n}} \\ D_n = -\frac{1}{n^4} \frac{1}{e^n - e^{-n}} \end{cases}.$$

Härav följer

$$\begin{aligned} C_n e^{ny} + D_n e^{-ny} &= \frac{1}{n^4} \frac{1}{e^n - e^{-n}} e^{ny} - \frac{1}{n^4} \frac{1}{e^n - e^{-n}} e^{-ny} \\ &= \frac{1}{n^4} \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{e^n - e^{-n}} = \frac{1}{n^4} \frac{\sinh ny}{\sinh n} \end{aligned}$$

och lösningen blir

$$u(x,y) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \frac{\sinh ny}{\sinh n} \sin nx.$$