Institutionen för Matematik, KTH
Per Sjölin

TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Lördagen den 14 januari 2006, kl 14.00–19.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook.* Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Antag att funktionen f har period 2π och att $f(x) = 1-|x|+\sin^2 x$ för $-\pi \leq x \leq \pi$. Beräkna f:s Fourierserie. (5 p)

2. Bestäm en talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sådan att $a_0 = 3$, $a_1 = 20$ och $a_{n+2} = 14a_{n+1} - 48a_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. (5 p)

3. Finn det polynom p av grad högst 1 som minimerar (5 p)

$$\int_0^\infty |e^{x/3} - p(x)|^2 e^{-x} \mathrm{d}x.$$

4. Sätt (5 p)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{1}{1+4x^2}$$

för $x \in \mathbb{R}$. Visa att $f * g$ tillhör $L^2(\mathbb{R})$.

5. Sätt (5 p)

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 2, \\ x^4, & x \geq 2. \end{cases}$$

Beräkna derivatan i distributionsmening av f.

6. Lös Dirichlets problem i enhetsskivan med villkoret (5 p)

$$u(x,y) = x^2 + y \quad \text{för} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

7. Antag (6 p)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin nx$$

för $0 \leq x \leq \pi$. Lös Laplaces ekvation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i rektangeln $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ med randvillkoren

$$\begin{cases} u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = f(x). \end{cases}$$