Lösningar till tentamensskrivning i 5B1202
Differentialekvationer och transformer II, del 2, 2006–05–17

(1) Enligt BETA är $\hat{f}(\omega) = \frac{2\sin\omega/2}{\omega}$ för $\omega \neq 0$ och $\hat{f}(0) = 1$. $g = f*f$ ger $\hat{g}(\omega) = (\hat{f}(\omega))^2 = \frac{4\sin^2\omega/2}{\omega^2}$ för $\omega \neq 0$ och $\hat{g}(0) = 1$.
$\hat{g}$ jämn medför att g jämn.
För $x \geq 0$ fås $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy = \int_I 1dy$ där $I = \{y \in \mathbb{R}; |y| \leq \frac{1}{2}$ och $|x-y| \leq \frac{1}{2}\} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]$.
För $x > 1$ fås $I = \varnothing$ och $g(x) = 0$.
För $0 \leq x \leq 1$ fås $I = [x-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ och längden av intervallet I är $\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 - x$ vilket ger $g(x) = 1 - x$.
Då g är jämn fås

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$$

(2) Vi har

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-t}(\sin t)H(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-t}\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{-i\omega t - t + it}dt - \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{-i\omega t - t - it}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{(-i\omega - 1 + i)t}dt - \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{(-i\omega - 1 - i)t}dt \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(-i\omega-1+i)t}}{-i\omega - 1 + i}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(-i\omega-1-i)t}}{-i\omega - 1 - i}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{i\omega + 1 - i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{i\omega + 1 + i} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{i\omega + 1 + i - (i\omega + 1 - i)}{(i\omega + 1 - i)(i\omega + 1 + i)} = \frac{1}{2i}\frac{2i}{(1 + i\omega)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{1 - \omega^2 + 2i\omega + 1} = \frac{1}{2 - \omega^2 + 2i\omega}
\end{aligned}$$

(3) Vi har $f = (x+2)\delta(x) + (x+1)(1 - H(x)) + e^{-x^2}H(x)$.
Då $x + 2 = 2$ för $x = 0$ fås $(x+2)\delta(x) = 2\delta(x)$ och $f = 2\delta(x) + (x+1)(1 - H(x)) + e^{-x^2}H(x)$.

Då $H' = \delta$ fås

$$
\begin{aligned}
f' &= 2\delta'(x) + (x+1)(-\delta(x)) + 1 - H(x) + e^{-x^2}\delta(x) \\
&\quad - 2xe^{-x^2}H(x) \\
&= 2\delta'(x) - \delta(x) + 1 - H(x) + \delta(x) - 2xe^{-x^2}H(x) \\
&= 2\delta'(x) + 1 - H(x) - 2xe^{-x^2}H(x)
\end{aligned}
$$

(4) Z-transformering av

$$
\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 1 + (-1)^n, n = 0, 1, 2, \ldots \\ a_0 = 0 \end{cases}
$$

ger $zA(z) - 2A(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}$ där $A(z)$ är Z-transformen av $(a_n)_0^\infty$.

Härav följer $(z-2)A(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}$ och

$$
A(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} + \frac{z}{(z+1)(z-2)}.
$$

Partialbråksuppdelning ger

$$
\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}
$$

och

$$
\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1/3}{z+1} + \frac{1/3}{z-2}
$$

Härav följer $A(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} - \frac{z/3}{z+1} + \frac{z/3}{z-2} = \frac{4}{3}\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z+1}$.

Invers Z-transformering ger

$$
a_n = \frac{4}{3}2^n - 1 - \frac{1}{3}(-1)^n, n = 0, 1, 2, \ldots
$$

(5) Vi har $f(x) = e^{-3x^2}$ för $x \in \mathbb{R}$.

Vi inför inre produkten $(g, h) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}e^{-x^2}dx$ i rummet $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

Då gäller $||g||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 e^{-x^2}dx$ och

$$
||f - p||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - p(x)|^2 e^{-x^2}dx.
$$

Låt S beteckna det delrum av $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ som består av polynom av grad högst 1. Hermitepolynomen $H_0(x) = 1$ och

$H_1(x) = 2x$ utgör en ortogonal bas för S. p skall väljas som ortogonala projektionen av f på S dvs

$$p = \frac{(f, H_0)}{\|H_0\|^2} H_0 + \frac{(f, H_1)}{\|H_1\|^2} H_1.$$

$(f, H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2} 2xe^{-x^2} dx = 0$ ty $2xe^{-4x^2}$ är en udda funktion.

$\|H_0\|^2 = \sqrt{\pi}$ och $(f, H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ enligt BETA.

Härav följer att $p(x) = \frac{\sqrt{\pi}/2}{\sqrt{\pi}} 1 = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Minimivärdet av integralen ges av $\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \|p\|^2$, där $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-3x^2})^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-7x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{7}}$ enligt BETA, och $\|p\|^2 = \|\frac{1}{2} H_0\|^2 = \frac{1}{4}\|H_0\|^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$.

Härav följer att minimivärdet är

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{4 - \sqrt{7}}{4\sqrt{7}}$$

(6) Sätt $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Då är $u_{xx} = X''T$ och $u_{tt} = XT''$ och vågekvationen ger $X''T = XT''$ och $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$.

Vi sätter $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda^2$ och får de ordinära differentialekvationerna $X'' + \lambda^2 X = 0$ och $T'' + \lambda^2 T = 0$.

Problemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

har lösningar $X = c_n \sin nx$ för $\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, och om λ^2 ersättes med ett tal < 0 fås inga icke-triviala lösningar. Differentialekvationen för T har motsvarande lösningar $T = A_n \cos nt + B_n \sin nt$.

Härav följer att $u_n(x, t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$ uppfyller vågekvationen och randvillkoren $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, och samma gäller för $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$.

Vi har

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nt + B_n n \cos nt) \sin nx.$$

De 2 sista randvillkoren ger

$$u(x,0) = \sum_1^\infty A_n \sin nnx = \sum_1^\infty \frac{1}{n^6} \sin nx$$

och

$$u_t(x,0) = \sum_1^\infty B_n n \sin nx = 0.$$

Vi får därför $A_n = \frac{1}{n^6}$ och $B_n = 0$ och lösningen blir $u(x,t) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^6} \cos nt \sin nx$.

(7) Utveckla y i Fourierserie $y(t) = \sum_{-\infty}^\infty c_n e^{int}$. y'' har då Fourierserie $\sum_{-\infty}^\infty (in)^2 c_n e^{int}$ och vi får $y''(t) = \sum_{-\infty}^\infty (-n^2) c_n e^{int}$.

Vidare är

$$y(t+\pi) = \sum_{-\infty}^\infty c_n e^{in(t+\pi)} = \sum_{-\infty}^\infty e^{in\pi} c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^\infty (-1)^n c_n e^{int}.$$

Ekvationen $2y''(t) + 9y(t) = y(t+\pi)$ ger därför

$$2\sum_{-\infty}^\infty (-n^2) c_n e^{int} + 9\sum_{-\infty}^\infty c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^\infty (-1)^n c_n e^{int}$$

och

$$\sum_{-\infty}^\infty (-2n^2 + 9 - (-1)^n) c_n e^{int} = 0$$

varav följer att $(-2n^2 + 9 - (-1)^n) c_n = 0$ för $n \in \mathbb{Z}$.

För $n \neq \pm 2$ är $9 - 2n^2 - (-1)^n \neq 0$ och det följer att $c_n = 0$.

För $n = \pm 2$ är $9 - 2n^2 - (-1)^n = 9 - 8 - 1 = 0$ och c_n kan väljas godtyckligt.

Härav följer att de sökta lösningarna ges av funktionerna $Ae^{i2t} + Be^{-i2t}$ där A och B är konstanter.