Institutionen för Matematik, KTH

TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Onsdagen den 17 maj 2006, kl 14.00–19.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook*. Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. f är en funktion på $\mathbb{R}$ som definieras av (5 p)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sätt $g = f * f$. Beräkna g och dess Fouriertransform $\hat{g}$.

2. Sätt $f(t) = e^{-t}(\sin t)H(t)$ för $t \in \mathbb{R}$, där H betecknar Heavisides stegfunktion. Beräkna Fouriertransformen av f. (5 p)

3. Låt f beteckna distributionen (5 p)

$$(x+2)\delta(x) + (x+1)(1 - H(x)) + e^{-x^2}H(x),$$

där H betecknar Heavisides stegfunktion. Beräkna derivatan i distributionsmening av f.

4. Bestäm en talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sådan att $a_0 = 0$ och $a_{n+1} - 2a_n = 1 + (-1)^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. (5 p)

5. Sätt $f(x) = e^{-3x^2}$ för $x \in \mathbb{R}$. Bestäm det polynom p av grad högst 1 som minimerar (5 p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - p(x)|^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Bestäm också minimivärdet av integralen.

6. Lös vågekvationen $u_{xx} = u_{tt}$ i området $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$ med randvillkoren (5 p)

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \sin nx \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

7. Bestäm de 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara lösningarna till ekvationen (6 p)

$$2y''(t) + 9y(t) = y(t+\pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ledning: Använd Fourierserier.