Lösningar till tentamensskrivning i 5B1202
Differentialekvationer och transformer II, del 2, 2006–08–22

(1) Sätt $f(t) = e^{-t^2}$ för $t \in \mathbb{R}$ och

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

Då är $h = fg$ och $|h(t)| \leq e^{-t^2}$. Då $e^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R})$ gäller också $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Av Riemann-Lebesgues lemma följer att $\lim\limits_{w \to \infty} \hat{h}(w) = 0$.

Enligt BETA är $\hat{h} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$, $\hat{f}(w) = \sqrt{\pi} e^{-w^2/4}$ och

$$\hat{g}(w) = \begin{cases} \pi & , \quad |w| < 1 \\ 0 & , \quad |w| > 1. \end{cases}$$

Härav fås

$$\hat{h}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w-u)\hat{g}(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\pi} e^{-(w-u)^2/4} \pi du$$

vilket är > 0 ty integranden är positiv.

(2) Då $\sin t$ är en udda funktion fås

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwt} \sin t\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} -i \sin wt \sin t\,dt = -2i \int_0^{\pi} \sin wt \sin t\,dt \\
&= i \int_0^{\pi} [\cos(wt+t) - \cos(wt-t)]\,dt \\
&= i \left[\frac{\sin(wt+t)}{w+1} - \frac{\sin(wt-t)}{w-1} \right]_0^{\pi} \\
&= i \left(\frac{\sin(w\pi+\pi)}{w+1} - \frac{\sin(w\pi-\pi)}{w-1} \right) \\
&= i \left(-\frac{\sin \pi w}{w+1} + \frac{\sin \pi w}{w-1} \right) \\
&= i \sin \pi w \left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1} \right) = \frac{2i \sin \pi w}{w^2 - 1}
\end{aligned}$$

för $w \neq \pm 1$.

Vidare är

$$\hat{f}(1) = -i\int_0^{\pi} 2\sin^2 t\,dt = -i\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt = -i\pi$$

och $\hat{f}(-1) = i\pi$.

Plancherels formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(w)\right|^2 dw$$

ger sedan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 \pi w}{(w^2-1)^2}dw &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\pi w}{(w^2-1)^2}dw \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\left|\hat{f}(w)\right|^2 dw \\
&= \frac{1}{8}\,2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} 2\sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}\pi = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

(3) $f(t)$ kan skrivas

$$f(t) = H(t)\left(e^{-t+it}\right) + (1-H(t))\,e^{t+it}$$

där H är Heavisidefunktionen. Derivering ger

$$\begin{aligned}
f'(t) &= H(t)e^{-t+it}(i-1) + e^{-t+it}\delta(t) \\
&\quad + (1-H(t))e^{t+it}(i+1) - e^{t+it}\delta(t) \\
&= e^{-|t|+it}(i - \operatorname{sgn} t) \quad \text{där } \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & , \quad t>0 \\ -1 & , \quad t<0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Här användes att $e^{-t+it}\delta(t) - e^{t+it}\delta(t) = \delta(t) - \delta(t) = 0$.

Vidare fås

$$\begin{aligned}
f''(t) &= H(t)e^{-t+it}(i-1)^2 + e^{-t+it}(i-1)\delta(t) \\
&\quad + (1-H(t))\,e^{t+it}(i+1)^2 - e^{t+it}(i+1)\delta(t) \\
&= -e^{-|t|+it}2i\ \operatorname{sgn} t + (i-1-i-1)\delta(t) \\
&= -e^{-|t|+it}2i\ \operatorname{sgn} t - 2\delta(t)
\end{aligned}$$

ty $(i-1)^2 = i^2+1-2i = -2i$ och $(i+1)^2 = i^2+1+2i = 2i$.

(4) Z-transformering av $a_{n+1} - 3a_n = 2^n - 2$, $a_0 = 2$, ger

$$zA(z) - 2z - 3A(z) = \frac{z}{z-2} - 2\,\frac{z}{z-1}$$

där $A(z)$ är Z-transformen av $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

Härav fås

$$(z-3)A(z) = 2z + \frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-1}$$

och

$$A(z) = \frac{2z}{z-3} + \frac{z}{(z-3)(z-2)} - 2\frac{z}{(z-3)(z-1)}.$$

Partikelbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

och

$$\frac{1}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-3} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1}.$$

Härav följer

$$\begin{aligned} A(z) &= 2\frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-1} \\ &= 2\frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1}. \end{aligned}$$

Invers Z-transformering ger sedan

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(5) Använd inre produkten $(f, g) = \int_0^3 f(x)\overline{g(x)}dx$ i rummet $L^2(0,3)$. Skall minimera $\|e^x - p\|$ där p varierar i delrummet $S =$ rummet av polynom av grad högst 1. Minimum fås då $p =$ ortogonala projektionen av e^x på S. Skall bestämma en ON-bas φ_0, φ_1 i S. Den sökta ortogonala projektionen ges då av

$$(e^x, \varphi_0)\varphi_0 + (e^x, \varphi_1)\varphi_1.$$

Vi har $\|1\|^2 = \int_0^3 1dx = 3$ och $\|1\| = \sqrt{3}$. Sätt $\varphi_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ så att $\|\varphi_0\| = 1$. Sätt $v_1 = x - (x, \varphi_0)\varphi_0$ så att $v_1 \perp \varphi_0$. Man har $(x,\varphi_0)=\int_0^3 x\frac{1}{\sqrt{3}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{x^2}{2}]_0^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ vilket ger $v_1=x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}=x-\frac{3}{2}$. Vi har också

$$\begin{aligned}\|v_1\|^2&=\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\left[\frac{(x-\frac{3}{2})^3}{3}\right]_0^3\\&=\frac{(\frac{3}{2})^3}{3}+\frac{(\frac{3}{2})^3}{3}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

vilket ger $\|v_1\|=\frac{3}{2}$.

Sätt $\varphi_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{2}{3}x-1$. φ_0,φ_1 är då en ON-bas för S.

Vi har

$$(e^x,\varphi_0)=\int_0^3 e^x\frac{1}{\sqrt{3}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}[e^x]_0^3=\frac{1}{\sqrt{3}}(e^3-1)$$

och en partiell integration ger

$$\begin{aligned}(e^x,\varphi_1)&=\int_0^3 e^x\left(\frac{2}{3}x-1\right)dx\\&=\left[e^x\left(\frac{2}{3}x-1\right)\right]_0^3-\int_0^3 e^x\frac{2}{3}dx\\&=e^3(2-1)+1-\frac{2}{3}\left[e^x\right]_0^3\\&=e^3+1-\frac{2}{3}\left(e^3-1\right)=\frac{1}{3}e^3+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Den sökta ortogonala projektionen blir då

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^3-1\right)\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{1}{3}e^3+\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}x-1\right)\\&=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}e^3x-\frac{1}{3}e^3+\frac{10}{9}x-\frac{5}{3}\\&=-2+\frac{1}{9}\left(2e^3x+10x\right)=\frac{1}{9}\left(2e^3+10\right)x-2.\end{aligned}$$

(6) Vi har villkoren

$$\begin{cases}u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 & (1)\\ u(x,0)=0 & (2)\\ u(x,\pi)=\sum_1^\infty\frac{1}{n^4}\cos nx & (3)\end{cases}$$

Sätt $u(x,y)=X(x)Y(y)$.

$\Delta u=0$ ger $X''Y+XY''=0$ och $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$.

Vi sätter $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$ där $\lambda \geq 0$.

Man får ekvationerna

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

och

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

(1) och (2) ger villkoren $X'(0) = X'(\pi) = 0$ och $Y(0) = 0$.

Vi betraktar först fallet $\lambda > 0$.

Vi får lösningarna

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin x \quad \text{och} \quad Y = c_3 \cos h\lambda y + c_4 \sinh \lambda y$$

till de ordinära differentialekvationerna ovan.

Vi har $X' = -\lambda c_1 \sin \lambda x + \lambda c_2 \cos \lambda x$ och randvillkoren ger $c_2 = 0$ och $\sin \lambda\pi = 0$. Detta är uppfyllt för $\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$Y(0) = 0$ ger $c_3 = 0$ vilket visar att funktionerna $A_n \sinh ny \cos nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, uppfyller Laplaceekvationen och villkoren (1) och (2).

För $\lambda = 0$ fås på motsvarande sätt funktionen $A_0 y$.

Här är A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, konstanter.

Vi sätter $u(x, y) = A_0 y + \sum_1^\infty A_n \sinh ny \cos nx$. u uppfyller då $\Delta u = 0$ och villkoren (1) och (2).

Vi har $u(x, \pi) = A_0 \pi + \sum_1^\infty A_n \sinh n\pi \cos nx$ och (3) blir uppfyllt om $A_0 = 0$ och A_n uppfyller $A_n \sinh n\pi = \frac{1}{n^4}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Man får $A_n = \frac{1}{n^4 \sinh \pi n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösningen blir $u(x, y) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4 \sinh \pi n} \sinh ny \cos nx$.

(7) Utveckla y i Fourierserie: $y(t) = \sum_{-\infty}^\infty c_n e^{int}$. Då fås

$$y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in)^2 e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n e^{int}$$

och

$$y\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t+\frac{\pi}{2})} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} e^{in\pi/2}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} i^n c_n e^{int}$$

Ekvationen $y''(t) = 4y(t + \frac{\pi}{2})$ ger

$$\sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} 4i^n c_n e^{int}$$

Härav följer $\sum_{-\infty}^{\infty} (n^2 + 4i^n) c_n e^{int} = 0$ och $(n^2 + 4i^n) c_n = 0$ för $n \in \mathbb{Z}$.

$n \neq \pm 2$ medför $|4i^n| = 4$ och $|n^2| \neq 4$ vilket ger $n^2 + 4i^n \neq 0$ och $c_n = 0$.

$n = \pm 2$ ger $i^n = i^2 = -1$ och $n^2 = 4$ vilket medför $n^2 + 4i^n = 4 - 4 = 0$. Det följer att c_n kan väljas godtyckligt i detta fall.

Lösningen blir därför $y(t) = Ae^{i2t} + Be^{-i2t}$ där A och B är konstanter.