Inst. för Matematik, KTH

Tentamensskrivning

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2

Tisdagen den 22 augusti 2006, kl. 8.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

(1) h är en funktion på $\mathbb{R}$ som definieras av

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^2} \frac{\sin t}{t} & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

Visa att för Fouriertransformen $\hat{h}$ gäller att $\hat{h}(w) \neq 0$ för alla $w \in \mathbb{R}$ men att

$$\lim_{w \to \infty} \hat{h}(w) = 0.$$ **(5p)**

(2) f är en funktion på $\mathbb{R}$ som definieras av

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad |t| \leq \pi \\ 0 & , \quad |t| > \pi. \end{cases}$$

Beräkna Fouriertransformen av f. Använd resultatet för att beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi x}{(x^2-1)^2}\, dx.$$ **(5p)**

(3) Sätt $f(t) = e^{-|t|+it}$ för $t \in \mathbb{R}$. Beräkna första- och andraderivatan i distributionsmening av f. **(5p)**

(4) Bestäm en talföljd $(a_n)_{n=0}^\infty$ sådan att $a_0 = 2$ och $a_{n+1} - 3a_n = 2^n - 2$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. **(5p)**

(5) Finn det polynom p av grad högst 1 som minimerar

$$\int_0^3 \left|e^x - p(x)\right|^2 dx. \qquad \textbf{(5p)}$$

(6) Lös Laplaceekvationen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i området $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ med randvillkoren

$$\begin{cases} u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,\pi) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \cos nx. \end{cases} \qquad \textbf{(5p)}$$

(7) Bestäm de 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara lösningarna till ekvationen

$$y''(t) = 4y\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(6p)}$$