

TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 2

ONSDAGEN DEN 20 DECEMBER 2006, KL 14.00–19.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook*. Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Antag att f har period 2π och att $f(x) = x$ för $0 \leq x \leq \pi$ och $f(x) = 0$ för $-\pi < x < 0$. Bestäm f 's Fourierserie och beräkna seriens summa på intervallet $[-\pi, \pi]$. (5 p)

2. Finn det polynom $p(x)$ av grad högst 1 som minimerar (5 p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cos x - p(x)|^2 e^{-x^2} dx.$$

3. Finn en lösning till Dirichlets problem i enhetsskivan med randvillkoret $u(x, y) = x^3$ för $x^2 + y^2 = 1$. Lösningen skall ges som en funktion av x och y . (5 p)

4. Använd Plancherels formel för att beräkna integralen (5 p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|} \sin x}{x} dx.$$

Beräkningen skall göras utan användande av tabellen över bestämda integraler i *BETA*.

5. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ är en talföljd som uppfyller $a_0 = 1$, $a_1 = 8$ och $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$. Bestäm Z -transformen av talföljden och bestäm också talföljden. (5 p)

6. Sätt $f(t) = t \sin^2 t$ för $t \in \mathbb{R}$. Bestäm Fouriertransformen i distributionsmening av f . (5 p)

7. Bestäm en lösning till problemet (6 p)

$$\begin{cases} u_{xx} = t^2 u_t, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 1 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 1 \\ u(x, 1) = 2 \sin x + 3 \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ledning: Använd separation av variabler.