Institutionen för Matematik, KTH

Lösningsförslag till

TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Tisdagen den 5 juni 2007, kl 14.00–19.00

1. Fourierserien är $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, där

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n \geq 0, \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n \geq 1.$$

Härav fås

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \{\text{partiell integration}\} = \left[\frac{\sin nx}{n}x\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2}(1-\cos n\pi) = \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

för $n \geq 1$ och

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ jämnt och } n \geq 1 \\ 2/\pi n^2, & \text{om } n \text{ udda och } n \geq 1. \end{cases}$$

Vidare är

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Dessutom fås med en partiell integration

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos nx}{n}x\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\cos n\pi}{n}\pi + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

och $b_n = (-1)^{n+1}/n$, $n = 1, 2, 3\ldots$.

2. Vi har

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{-1+i(\omega+2)} = -\frac{1}{1-i(\omega+2)}.$$

Enligt *BETA* gäller att $e^t(1-H(t))$ har Fouriertransform $(1-i\omega)^{-1}$ (här är $H(t)$ Heavisidefunktionen). *BETA* ger sedan också att $e^{-2it}e^t(1-H(t))$ har Fouriertransform $(1-i(\omega+2))^{-1}$. Härav följer att

$$f(t) = -e^{-2it}e^t(1-H(t)) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ -e^{-2it}e^t, & t < 0. \end{cases}$$

3. Laguerrepolynomen utgör ett fullständigt ON-system i rummet $L^2((0,\infty),e^{-x})$. Härav följer att $e^{-x} = \sum_0^\infty c_n L_n(x)$, där c_n är inre produkten av e^{-x} och L_n, d v s

$$c_n = \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Enligt *BETA* är $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x D^n(x^n e^{-x})$, vilket ger $c_n = \int_0^\infty \frac{1}{n!} D^n(x^n e^{-x}) e^{-x} \mathrm{d}x$. Efter n partiella integrationer fås

$$c_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}(-1)^n D^n e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x} e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-2x} \mathrm{d}x.$$

Med integralens värde ur *BETA* fås $c_n = \frac{1}{n!}\frac{n!}{2^{n+1}} = 2^{-n-1}$. Den sökta utvecklingen är alltså $e^{-x} = \sum_0^\infty 2^{-n-1} L_n(x)$ med konvergens i rummet $L^2((0,\infty),e^{-x})$.

4. Sätt $g(t) = (1+t^2)^{-1}$ och $h(t) = e^{-t^2}$ för $t \in \mathbb{R}$. Då är

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty g(x-t)h(t)\mathrm{d}t = g * h(x)$$

och $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega)$. Enligt *BETA* är $\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ och $\hat{h}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$ och härav följer $\hat{f}(\omega) = \pi^{3/2} e^{-|\omega| - \omega^2/4}$.

5. Vi har

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 4 \\ \frac{1}{2}x^{-1/2}, & x > 4, \end{cases}$$

där $f'(x)$ betecknar derivatan av f i punkten x. Definiera en funktion g genom

$$g(x) = \begin{cases} -3x^2, & x \le 0 \\ 0, & 0 \le x \le 4 \\ \frac{1}{2}x^{-1/2}, & x \ge 4. \end{cases}$$

Definitionen av derivata i distributionsmening ger, för $\varphi \in \mathscr{S}$, att

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 x^3\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_4^\infty \sqrt{x}\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \{\text{partiell integration}\} \\ &= \left[\varphi(x)x^3\right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)3x^2\mathrm{d}x - \left[\varphi(x)\sqrt{x}\right]_4^\infty + \int_4^\infty \varphi(x)\frac{1}{2}x^{-1/2}\mathrm{d}x \\ &= 2\varphi(4) + \int_{-\infty}^\infty g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 2\delta_4(\varphi) + g(\varphi). \end{aligned}$$

Härav följer att $f' = 2\delta_4 + g$, där f' är derivatan i distributionsmening av f.

6. Enligt formuleringen av problemet är följden $(4^n)_{n=0}^{\infty}$ faltningen av följderna $(2^n)_0^{\infty}$ och $(a_n)_0^{\infty}$. Om vi låter $A(z)$ beteckna Z-transformen av följden $(a_n)_0^{\infty}$ så fås

$$\frac{z}{z-2}A(z) = \frac{z}{z-4},$$

ty $(2^n)_0^{\infty}$ har Z-transformen $z(z-2)^{-1}$ och $(4^n)_0^{\infty}$ har Z-transformen $z(z-4)^{-1}$. Härav fås

$$A(z) = \frac{z-2}{z-4} = \frac{z}{z-4} - \frac{2}{z-4}.$$

$z(z-4)^{-1}$ har invers Z-transform $(4^n)_0^{\infty}$ och $-2(z-4)^{-1}$ har enligt *BETA* invers Z-transform $(-2 \cdot 4^{n-1}\theta(n-1))_0^{\infty}$, där

$$\theta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Härav följer $a_0 = 1$ och $a_n = 4^n - 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$ för $n \geq 1$.

7. Problemet är

$$\begin{aligned} u_{xx} &= tu_t, && 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 1 && (1) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 1 && (2) \\ u(x,1) &= (\sin x)(\cos x), && 0 \leq x \leq \pi. && (3) \end{aligned}$$

Vi använder separation av variabler och ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$. (1) ger $X''T = tXT'$ och

$$\frac{X''}{X} = \frac{tT'}{T} = -\lambda,$$

där λ är en konstant. Man får dels

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0,$$

dels $tT' = -\lambda T$, d v s $T' + (\lambda/t)T = 0$. Problemet för X har lösningarna $X = \sin nx$, $n = 1,2,3,\ldots$, för $\lambda = n^2$. För T fås då ekvationen $T' + (n^2/t)T = 0$, som har integrerande faktor $e^{n^2 \ln t} = t^{n^2}$. Man får $t^{n^2}T' + n^2 t^{n^2-1}T = 0$ och $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{n^2}T) = 0$. Integration ger $t^{n^2}T = C$ och $T = Ct^{-n^2}$, där C är en konstant. Härav följer att $u_n = A_n t^{-n^2}\sin nx$, $n = 1,2,3,\ldots$, uppfyller (1) och (2). Här är A_n konstanter.

Genom linearitet följer att

$$u = \sum_{1}^{\infty} A_n \frac{\sin nx}{t^{n^2}}$$

också uppfyller (1) och (2). Villkoret (3) ger

$$u(x,1) = \sum_{1}^{\infty} A_n \sin nx = (\sin x)(\cos x) = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

vilket är uppfyllt för $A_2 = \frac{1}{2}$ och alla övriga $A_n = 0$. Härav följer

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{t^4}.$$