Lösningar till tentamensskrivning i SF 1629 Differentialekvationer och transformer II, del 2, 2007-12-14

1. Enligt BETA har x^3 Fourierserie

$$2\pi^2 \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right) \sin nx$$

och $x^3 \in L^2(-\pi,\pi)$.

Enligt teorin gäller då att de primitiva funktionerna till x^3 fås genom termvis integration av Fourierserien, vilket ger

$$\frac{x^4}{4} = c + 2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)\cos nx,$$

$|x|<\pi$, där c är en konstant. Härav följer

$$x^4 = d + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{8\pi^2}{n^2}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)\cos nx, \quad |x|<\pi,$$

där d är en konstant.

Integration ger $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = 2\pi d$ dvs

$$d = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{2\pi}\, 2\int_0^\pi x^4\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}$$

Härav följer att

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{8\pi^2}{n^2}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)\cos nx \quad \text{för } |x| < \pi.$$

Detta är också Fourierserien för f ty

$$\sum_1^\infty \left|(-1)^n \frac{8\pi^2}{n^2}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)\right| \text{ är konvergent.}$$

2. Låt $(a_n)_0^\infty$ ha Z-transform $A(z)$. Då gäller att $(a_{n+1})_0^\infty$ har Z-transform

$$z\,(A(z) - a_0) = z\,A(z) - 4z$$

och $(a_{n+2})_0^\infty$ har Z-transform

$$z^2\left(A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right) = z^2 A(z) - 4z^2 - 10z$$

Z-transformering av likheten

$$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1} + 10 \cdot 4^n$$

ger

$$z^2 A - 4z^2 - 10z = 2A + zA - 4z + 10\frac{z}{z-4}.$$

Härav följer

$$A(z^2 - z - 2) = 4z^2 + 10z - 4z + 10\frac{z}{z-4}$$

och $A(z+1)(z-2) = 4z^2 + 6z + 10\frac{z}{z-4}$.

Det följer att

$$\frac{A}{z}(z+1)(z-2) = 4z+6+\frac{10}{z-4} =$$

$$= \frac{(4z+6)(z-4)+10}{z-4} \quad \text{och}$$

$$\frac{A}{z} = \frac{4z^2-10z-14}{(z+1)(z-4)(z-2)} = \frac{(z+1)(4z-14)}{(z+1)(z-4)(z-2)} =$$

$$= \frac{4z-14}{(z-4)(z-2)}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{A}{z} = \frac{3}{z-2} + \frac{1}{z-4} \quad \text{och}$$

$$A = 3\frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-4}$$

Invers Z-transformering ger $a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. Sätt $x(x) = H(x+\pi) - H(x-\pi)$, där H är

Heavisidefunktionen. Då är $f = x \sin x$

och $\chi' = \delta_{-\pi} - \delta_{\pi}$ där δ_a definieras av

$\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ för $\varphi \in \mathcal{S}$. Det följer att

$f' = x \cos x + \sin x \, (\delta_{-\pi} - \delta_{\pi}) = x \cos x$

ty $\sin x = 0$ för $x = \pm \pi$.

Sedan fås

$f'' = -x \sin x + (\cos x)\, \chi' =$

$= -x \sin x + (\cos x)\,\delta_{-\pi} - (\cos x)\,\delta_{\pi} =$

$= x \sin x - \delta_{-\pi} + \delta_{\pi}$ ty $\cos x = -1$ för

$x = \pm \pi$. Här är $\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

---

4. Sätt $h = f * g$. Då är $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$ (ty f

och $g \in L^1$) och speciellt fås

$\hat{h}(0) = \hat{f}(0)\,\hat{g}(0)$ dvs

$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\right) = 2 \cdot 2 = 4$

ty $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2$

och $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2.$

Dessutom är $h \geq 0$ och

$$h(x) = f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} g(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 2$$

för alla x ty $e^{-|x-t|} \leq 1$.

Härav följer

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2\,dx \leq \underline{\int_{-\infty}^{\infty} 2h\,dx} = 2\int_{-\infty}^{\infty} h\,dx = 2 \cdot 4 = 8$$

5. Vi inför inre produkten $(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2} dx$ i rummet $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Då fås

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx$$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x \sin x - p(x)|^2 e^{-x^2} dx = \|x\sin x - p(x)\|^2.$$

Vi skall alltså minimera $\|x\sin x - p(x)\|$ då p varierar i rummet S av polynom av grad högst 1. S spänns upp av Hermitepolynomen $H_0(x) = 1$ och $H_1(x) = 2x$, och enligt teorin fås minimum då p är ortogonala projektionen av $x \sin x$ på S, dvs

$$p(x) = \frac{(x\sin x, H_0)}{\|H_0\|^2} H_0(x) + \frac{(x \sin x, H_1)}{\|H_1\|^2} H_1(x).$$

Enligt BETA är $\|H_0\|^2 = (H_0, H_0) = \sqrt{\pi}$.

Vidare fås

$(x\sin x, H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sin x)\, 2x\, e^{-x^2} dx = 0$ ty

$2x^2 \sin x\, e^{-x^2}$ är en udda funktion. Man

får också

$$(x\sin x, H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \sin x\, e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin x\, dx$$

$$= [\text{part. integr.}] = \left[-\tfrac{1}{2} e^{-x^2} \sin x\right]_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-x^2} \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x - i \sin x) e^{-x^2} dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-x^2})(1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-1/4}$$

enligt BETA, ty $\sin x\, e^{-x^2}$ är en udda

funktion. Härav följer

$$p(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \tfrac{1}{2} e^{-1/4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Vi använder separation av variabler och

sätter $u(x,t) = X(x)\, T(t)$

Vågekvationen ger $X''T = XT''$ och

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}.$$

Vi sätter $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda^2$ där $\lambda > 0$.

Man får ekvationerna $X'' + \lambda^2 X = 0$ och

$T'' + \lambda^2 T = 0$ med lösningar

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

och $T = c_3 \cos \lambda t + c_4 \sin \lambda t$

Villkoret $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$ (1) ger

$X(0) = X(\pi) = 0$ vilket medför $c_1 = 0$ och

$c_2 \sin \lambda\pi = 0$.

Detta är uppfyllt för $\lambda = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

och vi får lösningar $X = C_n \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Vi sätter $u_n(x,t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, och u_n uppfyller då våg-

ekvationen och villkoret (1). Vi sätter sedan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$$

och även u uppfyller då vågekvationen och villkoret (1). Derivering ger

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nt + B_n n \cos nt) \sin nx.$$

Villkoren för $t=0$ ger sedan

$$u(x,0) = 0 = \sum_1^{\infty} A_n \sin nx \quad \text{och}$$

$$u_t(x,0) = 4 \sin 3x + \sin 5x = \sum_1^{\infty} B_n n \sin nx.$$

Detta är uppfyllt om alla $A_n = 0$ och om $B_n = 0$ för $n \neq 3$ och 5 och $B_3 \cdot 3 = 4$, $B_5 \cdot 5 = 1$. Härav fås $B_3 = \frac{4}{3}$, $B_5 = \frac{1}{5}$ och lösningen blir

$$u(x,t) = \frac{4}{3} \sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5t \sin 5x$$

7. Fouriertransformering av $y'' + 5y' + 6y = \delta$ ger

$(i\omega)^2 \hat{y} + 5 i\omega \hat{y} + 6\hat{y} = 1$ dvs

$((i\omega)^2 + 5 i\omega + 6)\hat{y} = 1$

Vi sätter $z = i\omega$ och får $(z^2+5z+6)\hat{y} = 1$ och

$$\hat{y} = \frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}.$$

Härav följer

$$\hat{y} = \frac{1}{2+i\omega} - \frac{1}{3+i\omega}.$$

Invers Fouriertransformering ger sedan enligt BETA

$$y = e^{-2t}H(t) - e^{-3t}H(t) =$$

$$= \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)H(t)$$ där H är Heavisidefunktionen