

Lösningar till tentamensskrivning i SF1629, Differentialekvationer och transformeringar II, del 2, 20080603.

1. Sätt $x(t) = 1$ för $|t| \leq 1$ och $x(t) = 0$ för $|t| > 1$. Enligt BETA är då $\hat{x}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$.

Om vi sätter $g = e^{it} x$ fås $\hat{g}(\omega) = \hat{x}(\omega - 1) = 2 \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1}$.

Vidare fås att $-itg(t)$ har Fouriertransform $\frac{d}{d\omega} (2 \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1}) = 2 \frac{(\omega - 1)\cos(\omega - 1) - \sin(\omega - 1)}{(\omega - 1)^2}$.

Multiplikation med i ger att $f(t) = tg(t)$ har Fouriertransform $2i \frac{(\omega - 1)\cos(\omega - 1) - \sin(\omega - 1)}{(\omega - 1)^2}$.

2. Låt talföljden ha Z-transform $A(z)$.

Då har $(a_{n+1})_{n=0}^\infty$ Z-transform $z(A(z) - a_0) = zA(z) - 5z$ och $(a_{n+2})_{n=0}^\infty$ har Z-transform

$z^2(A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}) = z^2A(z) - 5z^2 + 23z$. Z-transformering av likheten $a_{n+2} = 35a_n - 2a_{n+1}$ ger

$z^2A(z) - 5z^2 + 23z = 35A(z) - 2(zA(z) - 5z)$, vilket ger $A(z)(z^2 + 2z - 35) = 5z^2 - 13z$

dvs $A(z)(z - 5)(z + 7) = 5z^2 - 13z$.

Härav fås $\frac{A(z)}{z} = \frac{5z - 13}{(z - 5)(z + 7)} = \left\{ \text{pbu} \right\} = \frac{1}{z - 5} + \frac{4}{z + 7}$ och $A(z) = \frac{z}{z - 5} + 4 \frac{z}{z + 7}$.

Invers Z-transformering ger sedan $a_n = 5^n + 4(-7)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

3. Sätt $I = \int_0^\pi \sin^2 t \cos^4 t \, dt$ och $f(t) = \sin t \cos^2 t$ för $|t| \leq \pi$.

Då fås enligt Parsevals formel $I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |f(t)|^2 \, dt = \frac{p}{4} |a_0|^2 + \frac{p}{2} \sum_{n=1}^\infty (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ (*)

där a_n och b_n betecknar Fourierkoefficienterna för f , dvs f har Fourierserie $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

Vi har $f(t) = \sin t \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin t \cos 2t$.

Enligt BETA är $\sin t \cos 2t = \frac{1}{2} (\sin(-t) + \sin 3t) = -\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t$

vilket ger $f(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 3t = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 3t$

Härav följer att $b_1 = b_3 = \frac{1}{4}$ och att övriga Fourierkoefficienterna är lika med noll.

(*) ger $I = \frac{p}{2} (b_1^2 + b_3^2) = \frac{p}{2} (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = \frac{p}{16}$.

4. Sätt $h = f * g$. Då är $\hat{h} = \hat{f} \hat{g}$ (ty $f \in \mathcal{L}^1$ och $g \in \mathcal{L}^1$) och speciellt fås $\hat{h}(0) = \hat{f}(0) \hat{g}(0)$

dvs $\int_{-\infty}^\infty h(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \hat{h}(x) dx = \hat{h}(0) = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \int_{-\infty}^\infty g(x) dx = 1 \cdot p = p$ ty

$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 2(1 - \frac{1}{2}) = 1$ och $\int_{-\infty}^\infty g(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = p$.

Dessutom är $h \geq 0$ och $0 \leq g(x) \leq 1$, vilket ger $h(x) = \int_{-\infty}^\infty g(x-t) f(t) dt \leq \int_{-\infty}^\infty f(t) dt = 1$ för alla x .

Härav följer $\int_{-\infty}^\infty h^2(x) dx \leq \int_{-\infty}^\infty h(x) dx = p$ dvs $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

5. Fouriertransformering av $y'' + 15y' + 56y = \delta$ ger $(i\omega)^2 \hat{y} + 15i\omega \hat{y} + 56\hat{y} = 1$
dvs $((i\omega)^2 + 15i\omega + 56)\hat{y} = 1$.

Vi sätter $z = i\omega$ och får $(z^2 + 15z + 56)\hat{y} = 1$

$$\text{och } \hat{y} = \frac{1}{z^2 + 15z + 56} = \frac{1}{(z+7)(z+8)} = \frac{1}{z+7} - \frac{1}{z+8}.$$

$$\text{Härav följer } \hat{y} = \frac{1}{7+i\omega} - \frac{1}{8+i\omega}.$$

Invers Fouriertransformering ger sedan enligt BETA

$$y = e^{-7t}H(t) - e^{-8t}H(t) = (e^{-7t} - e^{-8t})H(t) \text{ där } H \text{ är Heavisidefunktionen.}$$

6. Vi inför inre produkten $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ i rummet $L^2(-1, 1)$.

$$\text{Då fås } \|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \text{ och } \int_{-1}^1 |e^{2|x|} - p(x)|^2 dx = \|e^{2|x|} - p(x)\|^2.$$

Vi skall alltså minimera $\|e^{2|x|} - p(x)\|$ då p varierar i rummet S av polynom av grad högst 3.

S spänns upp av Legendrepolyomen P_0, P_1, P_2 och P_3 , och enligt teorin fås minimum

$$\text{då } p \text{ är ortogonal projektionen av } e^{2|x|} \text{ på } S, \text{ dvs } p(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{(e^{2|x|}, P_n)}{\|P_n\|^2} P_n(x).$$

$$\text{Enligt BETA är } P_0(x) = 1, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ och } \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Vi har } (e^{2|x|}, P_n) = \int_{-1}^1 e^{2|x|} P_n(x) dx = 0 \text{ för } n = 1 \text{ och } n = 3 \text{ ty } P_n \text{ är udda}$$

$$\text{och även } e^{2|x|} P_n(x) \text{ udda för } n = 1 \text{ och } n = 3. \text{ Vidare är } \|P_0\|^2 = 2 \text{ och } \|P_2\|^2 = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Dessutom gäller } (e^{2|x|}, P_0) = \int_{-1}^1 e^{2|x|} \cdot 1 dx = 2 \int_0^1 e^{2x} dx = [e^{2x}]_0^1 = e^2 - 1 \text{ och då } P_2 \text{ är jämn fås också}$$

$$(e^{2|x|}, P_2) = 2 \int_0^1 e^{2x} \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \int_0^1 e^{2x} (3x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} (3x^2 - 1) \right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} 6x dx =$$

$$= e^2 + \frac{1}{2} - 3 \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} x dx = e^2 + \frac{1}{2} - 3 \left[\frac{1}{2} e^{2x} x \right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx = e^2 + \frac{1}{2} - 3 \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) \right]$$

$$(e^{2|x|}, P_2) = \frac{1}{4} (e^2 - 1).$$

$$\text{Härav följer att } p(x) = \frac{(e^{2|x|}, P_0)}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{(e^{2|x|}, P_2)}{\|P_2\|^2} P_2(x) = \frac{e^2 - 1}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{4}(e^2 - 1)}{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$p(x) = \frac{e^2 - 1}{2} + (e^2 - 1) \frac{5}{16} (3x^2 - 1) = (e^2 - 1) \frac{5}{16} x^2 + (e^2 - 1) \frac{3}{16}$$

7. Då $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ enligt BETA, kan problemet skrivas

$$u_{xx} = tu_t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 1 \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 1 \quad (2)$$

$$u(x, 1) = 3\sin x - \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3)$$

Vi använder separation av variabler och sätter $u(x, t) = X(x)T(t)$.

$$(1) \text{ ger } XT' = tXT \text{ och } \frac{X''}{X} = \frac{tT'}{T} = -\lambda, \text{ där } \lambda \text{ är en konstant.}$$

$$\text{Man får dels } X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \text{ och dels } tT' = -\lambda T \text{ dvs } T' + \frac{\lambda}{t}T = 0.$$

Problemet för X har lösningarna $X = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ för $\lambda = n^2$.

För T fås då ekvationen $T' + \frac{n^2}{t}T = 0$, som har integrerande faktor $e^{n^2 \ln t} = t^{n^2}$.

$$\text{Man får } t^{n^2}T' + n^2 t^{n^2-1}T = 0 \text{ och } \frac{d}{dt}(t^{n^2}T) = 0.$$

Integration ger $t^{n^2}T = C$ och $T = Ct^{-n^2}$, där C är en konstant.

Härav följer att $u_n = A_n t^{-n^2} \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ uppfyller (1) och (2). Här är A_n konstanter.

Genom linearitet följer att $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin nx}{t^{n^2}}$ också uppfyller (1) och (2).

Villkoret (3) ger $u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 3\sin x - \sin 3x$, vilket är uppfyllt om $A_1 = 3$, $A_3 = -1$

och alla övriga $A_n = 0$. Härav följer $u(x, t) = 3\frac{\sin x}{t} - \frac{\sin 3x}{t^9}$.