Institutionen för Matematik, **KTH**

# TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2009-12-18, kl. 08.00–13.00

*Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.*
*Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Preliminära betygsgränser: A: 32- , B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.*

**1)** Låt $f(x) = \sin^2 x$ på intervallet $(-\pi, 0)$.

**a)** Bestäm en Fourier-cosinusserie för $f$ över detta intervall. (1p)

**b)** Bestäm en Fourier-sinusserie för $f$ över detta intervall. (4p)

**2)** Beräkna gränsvärdet (5p)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n\sin(y/n)}{y}(1-|y|)^2 dy.$$

Alla uträkningar ska motiveras.

**3)** Låt $H_n = (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ $(n = 0, 1, \cdots)$ vara Hermite-polynomen (se i Beta). Visa (genom detaljerad uträkning) ortogonalitetsrelationen (5p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n \, dx = (n!)2^n \sqrt{\pi}\delta_{m,n}.$$

**4)** Bestäm alla $2\pi$-periodiska lösningar till egenvärdesproblemet (5p)

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0.$$

**5)** Låt $u$ vara en begränsad lösning till Dirichlet-problemet (5p)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

där $f \in L^1(\mathbf{R})$. Låt vidare

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Visa att $u = P(x,y) * f(x)$.

**6)** Given är en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, med $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, samt (5p)

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

Bestäm $a_n$.

**7a)** Låt $f(x) = (|x|^k + 1)\log|x|$ där $k$ är ett godtyckligt givet positiv tal. Visa att $f$ definierar en distribution genom (3p)

$$T_f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

**7b)** Låt $g$ vara en tempererad distribution, med egenskapen (3p)

$$x^2(g' + g) = 0.$$

Bestäm $g$ i exakt form. All uträkning ska motiveras i detalj.

**Lycka till**