Lösningsförslag SF1629, 2010-06-08, 08.00–13.00

1a) Vi har $\cos^2 x = (\cos 2x + 1)/2$, så vi får dess Fourier-cosinusserie:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

1b) För att få F-sinserien måste vi ha en udda funktion över intervallet $(-\pi, \pi)$. Därför utvidgar vi $f = \cos^2 x$ som en udda funktion $f(x) = -\cos^2 x$ över $(0, \pi)$. Fourier-sinus koefficienterna kan beräknas (anta $n \neq 0, 2$)

$$b_n(f) = \frac{2}{n\pi}\left(1 + \frac{2}{n^2 - 4}\right)((-1)^n - 1)$$

samt $b_0 = b_2 = 0$. Vi får

$$\cos^2 x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)}\left(\frac{2}{(4-(2m+1)^2)} - 1\right)\sin((2m+1)x).$$

2) Enligt Sats 2.1 i textboken ska tre kriterier vara uppfylda:

$$K_n(x) \geq 0, \qquad \int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|x|<1} K_n(x)dx = 0,$$

för alla $\delta > 0$. Det inses lätt den första och sista kriterierna är uppfyllda. Beräknar vi integralen, och sätter vi vilkoret

$$\int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1,$$

får vi att $C = \pi/4$.

3) Sätt $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ och $f(t) = \cos^2 \pi t = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi t}$. Insättning i differential-differensekvationen samt koefficientidentifiering ger

$$c_n = \frac{f_n}{in\pi + (-1)^n}.$$

Vi har

$$f_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos^2(\pi t)e^{in\pi t}dt,$$

som ger

$$f_0 = \frac{1}{2}, \qquad f_{\pm 2} = \frac{1}{4}, \qquad f_n = 0, \quad n \neq 0, \pm 2.$$

Detta ger

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_{\pm 2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1 \pm 2i\pi}, \qquad c_n = 0, \quad n \neq 0, \pm 2.$$

Alltså

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi^2 + 1}\left(\frac{1}{2}\cos 2\pi t + \pi \sin 2\pi t\right)$$

4) Använd Parsevals formel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Detta ger med $a_0 = 2$, $a_n = 2^{-n}$ för $n \geq 1$, $b_n = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{7}{3},$$

dvs

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{7\pi}{3}.$$

5) Se i textboken.

6) Sätt

$$f(x) = (x^2-1)\left(1 - 2H(x+1) + 2H(x-1)\right),$$

där H är Heaviside funktionen, och derivera. Använd även att $(x^2-1)\delta(x \pm 1) = 0$ etc... Vi får

$$\begin{aligned} f' &= 2x\left(1 - 2H(x+1) + 2H(x-1)\right) + (x^2-1)\left(-2\delta(x+1) + 2\delta(x-1)\right) \\ &= 2x\left(1 - 2H(x+1) + 2H(x-1)\right) \\ f'' &= 2\left(1 - 2H(x+1) + 2H(x-1)\right) + 2x\left(-2\delta(x+1) + 2\delta(x-1)\right) = \\ & 2\left(1 - 2H(x+1) + 2H(x-1)\right) + 4\delta(x+1) + 4\delta(x-1) \end{aligned}$$

Derivera en gång till så får man

$$f''' = 4\left(\delta'(x+1) - \delta(x+1) + \delta'(x-1) + \delta(x-1)\right).$$

7a) Vi har

$$0 = \sum_{n=0}^{N} a_n g_n = a a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{N} (a a_n + a_{n-1})\phi_n + a_{N+1}\phi_{N+1}.$$

Eftersom ϕ_n är ortogonal, så är de linjärt oberoende, därför är

$$a_0 = 0, \qquad a_{N+1} = 0, \qquad a a_n + a_{n-1} = 0, \quad n = 1, \cdots, N.$$

Eftersom $a \neq 0$ ger detta rekursivt $a_n = 0$, dvs linjärt oberoende.

7b-c) Låt f vara en given funktion i det givna inreproduktrummet. Vi har

$$f = \sum_{0}^{\infty} c_n \phi_n, \qquad c_n = < f, \phi > .$$

Om ortogonalsystemet $\{g_n\}_0^\infty$ inte är fullständigt så vill vi finna $f \neq 0$ så att $0 = < f, g_n >$ för alla n. Detta ger $\bar{a} < f, \phi_n > + < f, \phi_{n+1} > = 0$ som i sin tur efter iterationer ger, där $\gamma_n = < f, \phi_n >$:

$$\gamma_{n+1} = -\bar{a}\gamma_n = \cdots = (-\bar{a})^{n+1}\gamma_0$$

Valet $\gamma_0 = 1$ ger $\gamma_{n+1} = (-\bar{a})^{n+1}$. Dvs $f = \sum (-\bar{a})^n \phi_n$. Konvergensfrågan avgörs av värdet på a! Använd Parsevals formel:

$$\|f\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \sum_{1}^{\infty} |(-\bar{a})^n|^2 = \sum_{1}^{\infty} |a|^{2n} = \frac{1}{1 - |a|^2},$$

då $|a| < 1$ annars divergerar serien.

Alltså, då $|a| < 1$ så finns det en funktion $f = \sum (-\bar{a})^n \phi_n$ som är ortogonal mot alla g_n, dvs systemet blir ej fullständigt. Om $|a| \geq 1$ så är systemet fullständigt, eftersom det inte finns någon funktion f som är ortogonal mot systemet.