

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2010-06-08, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook.*

Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Preliminära betygsgränser: A: 32-, B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) Låt $f(x) = \cos^2 x$ på intervallet $(-\pi, 0)$.

a) Bestäm en Fourier-cosinusserie för f över detta intervall. (1p)

b) Bestäm en Fourier-sinusserie för f över detta intervall. (4p)

2) Bestäm konstanten C sådan att funktionen (5p)

$$K_n(x) = nC \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad \text{då} \quad \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}; \quad K_n(x) = 0 \quad \text{då} \quad |x| \geq \frac{1}{n},$$

blir en positiv kärna över intervallet $(-1, 1)$. (Motiveras ordentligt!)

3) Bestäm en lösning med period 2 till differential-differensekvationen (5p)

$$y'(t) + y(t-1) = \cos^2 \pi t.$$

4) Låt (5p)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{2^n}.$$

Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

5) Redogör i stora drag hur man löser följande problem:

a) Värmeledningsekvationen för en metalltråd av ändlig längd. (1p)

b) Värmeledningsekvationen för en metalltråd av oändlig längd. (2p)

c) Dirichlet-problemet i Enhetsskivan. (2p)

6) Bestäm distributionsderivatan f''' då

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad -\infty < x < \infty.$$

7) Låt $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara ett fullständigt ortonormalsystem i ett inre produktrum. Sätt

$$g_n = \phi_{n+1} + a\phi_n, \quad \text{där } a \neq 0.$$

a) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är linjärt oberoede. (2p)

b) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är ej fullständigt för $|a| \leq 1$. (2p)

c) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är fullständigt för $|a| > 1$. (2p)

Lycka till