Tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 2, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, lösningsförslag

Uppgift 1 (5 poäng). Svar:

i. Sant.

ii. Falskt.

iii. Sant.

iv. Sant.

v. Sant.

vi. Falskt.

vii. Sant.

viii. Sant.

ix. Sant.

x. Sant.

Uppgift 2 (5 poäng). Låt

$$y(t) = \begin{cases} \sin t & t > \pi, \\ 0 & t < \pi. \end{cases}$$

Beräkna y' och y'' (i distributionsmening), samt $y'' + y$. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

Lösning. Vi kan skriva

$$y(t) = H(t-\pi)\sin t,$$

varav

$$y'(t) = \delta(t-\pi)\sin t + H(t-\pi)\cos t = H(t-\pi)\cos t,$$

eftersom $\sin\pi = 0$. Vidare har vi

$$y''(t) = \delta(t-\pi)\cos t - H(t-\pi)\sin t = -\delta(t-\pi) - H(t-\pi)\sin t.$$

Vi får alltså **svar:**

$$\begin{aligned} y'(t) &= H(t-\pi)\cos t, \\ y''(t) &= -\delta(t-\pi) - H(t-\pi)\sin t, \\ y''(t) + y(t) &= -\delta(t-\pi). \end{aligned}$$

Uppgift 3 (5 poäng). a. Låt f vara den 2π-periodiska funktion sådan att $f(t) = |t| + \sin t$ för $-\pi < t \leq \pi$. Beräkna f:s reella fourierserie.

Lösning. Eftersom $\sin t$ är sin egna fourierserieutveckling räcker det att fourierserieutveckla $|t|$; låt oss kalla motsvarande reella fourierseriekoefficienter för a_n och b_n. Eftersom $|t|$ är en jämn funktion har vi $b_n = 0$ och

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt dt = \frac{2}{n\pi}[t\sin nt]_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nt dt = \frac{2}{n^2\pi}[\cos nt]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

för $n \neq 0$. För $n = 0$ har vi

$$a_0 = \pi.$$

Svar:

$$\frac{\pi}{2} + \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos nt.$$

b. För vilka t är fourierserien konvergent? Till vad konvergerar fourierserien (när den är konvergent)?

Lösning. Eftersom funktionen är 2π-periodisk, kontinuerlig och har generaliserade höger- och vänsterderivator i varje punkt så konvergerar fourierserien för alla t till $f(t)$ (se Sats 4.5 i boken). Vi får alltså **svar:** fourierserien konvergerar för alla t till $f(t)$.

c. Är serien likformigt konvergent (motivera ditt svar)?

Lösning. Notera att fourierserien kan skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(t),$$

där

$$h_0 = \pi/2, \quad h_1 = \sin t - \frac{4}{\pi^2}\cos t, \quad h_n(t) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos nt$$

för $n \geq 2$. Om vi låter

$$M_0 = \pi/2, \quad M_1 = 1 + \frac{4}{\pi^2}, \quad M_n = \frac{4}{n^2\pi}$$

för $n \geq 2$ så gäller det att $|h_n(t)| \leq M_n$ för alla heltal $n \geq 0$. Vidare har vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Om vi kombinerar dessa observationer med Weierstrass M-test så får vi slutsatsen att fourierserien konvergerar likformigt.

Uppgift 4 (5 poäng). Finn lösningen till ekvationen $\Delta u = 0$ i området $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ som uppfyller randvillkoren $u(x, y) = 1 + x + y^2$ för $x^2 + y^2 = 1$. *OBS: Lösningen skall anges som en funktion av x och y.*

Lösning. Lösningen kan skrivas på formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta).$$

Vad vi behöver göra är följdaktligen att anpassa randvillkoren. På randen ges funktionen av $1 + x + y^2$. Eftersom $x = \cos\theta$ och $y = \sin\theta$ på randen så får vi

$$1 + x + y^2 = 1 + \cos\theta + \sin^2\theta = 1 + \cos\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta = \frac{3}{2} + \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta.$$

Följdaktligen är $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$ (och övriga koefficienter är noll). Lösningen ges alltså av

$$\frac{3}{2} + r\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta = \frac{3}{2} + r\cos\theta - \frac{1}{2}(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = \frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Svar:

$$\frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Uppgift 5 (5 poäng). a. Beräkna Z-transformen av talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ om $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Lösning: Om vi Z-transformerar ekvationen så får vi

$$z^2 A(z) - z^2 a_0 - z a_1 + 3(zA(z) - z a_0) + 2A(z) = 0,$$

där $A(z)$ betecknar Z-transformen av talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Eftersom $a_0 = 1$ och $a_1 = 1$ kan denna ekvation skrivas

$$(z^2 + 3z + 2)A(z) = z^2 + 3z.$$

Vi får **svar:**

$$A(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 + 3z + 2}.$$

b. Beräkna $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Lösning: Enligt ovan har vi

$$A(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 + 3z + 2} = z\frac{z + 3}{(z + 1)(z + 2)} = z\left(\frac{2}{z + 1} - \frac{1}{z + 2}\right) = \frac{2z}{z + 1} - \frac{z}{z + 2}.$$

Detta ger **svar:**

$$a_n = 2(-1)^n - (-2)^n$$

för heltal $n \geq 0$.

Uppgift 6 (5 poäng). a. Antag att $y(t) = e^{-t}H(t)$ och att $x(t) = e^{t}(1-H(t))$, där

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

är Heavisidefunktionen. Beräkna faltningen $x * y$ (resultatet skall ges som en explicit funktion av t som inte inbegriper några integraler). Faltningen ges här av

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds.$$

Lösning: Fouriertransformen av $x * y$ ges av $\hat{x}\hat{y}$. Men

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}dt = \frac{1}{1-i\omega}$$

och

$$\hat{y}(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}dt = \frac{1}{1+i\omega}.$$

Följdaktligen ges fouriertransformen av $x * y$ av

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\omega^2}.$$

Vi får alltså **svar:**

$$(x * y)(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}.$$

b. Ett idealt lågpassfilter fungerar så att det släpper igenom alla vinkelfrekvenser under en viss brytvinkelfrekvens och blockerar alla övriga vinkelfrekvenser. Antag nu att brytvinkelfrekvensen är 1. Om man skickar en insignal, säg y_{in}, genom ett sådant lågpassfilter, så blir utsignalen, benämnd y_{ut}, den inversa fouriertransformen av funktionen Y_{ut}, där Y_{ut} ges av

$$Y_{\text{ut}}(\omega) = [H(\omega+1) - H(\omega-1)]\hat{y}_{\text{in}}(\omega),$$

och $\hat{y}_{\text{in}}$ är fouriertransformen av y_{in} (H betecknar här Heavisidefunktionen). Givet att $y_{\text{in}} = e^{-t}H(t)$, vad blir den relativa energiförlusten, d.v.s., vad blir

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|y_{\text{in}}|^2dt - \int_{-\infty}^{\infty}|y_{\text{ut}}|^2dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|y_{\text{in}}|^2dt}?$$

Lösning: Beräkna, till att börja med,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y_{\text{in}}|^2dt = \int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt = \frac{1}{2}.$$

Via Plancherels formel har vi även att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_{\mathrm{ut}}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}_{\mathrm{ut}}(\omega)|^2 d\omega.$$

Vidare är

$$\hat{y}_{\mathrm{ut}}(\omega) = [H(\omega+1) - H(\omega-1)]\hat{y}_{\mathrm{in}}(\omega) = [H(\omega+1) - H(\omega-1)]\frac{1}{1+i\omega}.$$

Genom att kombinera dessa likheter får vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_{\mathrm{ut}}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi}[\arctan \omega]_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Svar: 1/2.

Uppgift 7 (5 poäng). a. Lös

$$\begin{cases} u_t + 2u = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & \end{cases}$$

där

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x).$$

Lösning: Sök, till att börja med, lösningar på produktform:

$$T(t)X(x).$$

Ekvationen ger

$$\frac{T'}{T} + 2 = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

där λ är en konstant. Detta ger en ekvation för X och en för T. Ekvationen för X är

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Eftersom vi även har randvillkoren $X(0) = X(1) = 0$ så får vi lösningar

$$X_n = \sin(n\pi x).$$

Motsvarande T:n uppfyller

$$T' = -[2 + (n\pi)^2]T.$$

Vi får alltså lösningarna

$$u_n(x,t) = e^{-[2+(n\pi)^2]t} \sin(n\pi x).$$

Eftersom ekvationen är linjär och homogen och randvillkoren är homogena så är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-[2+(n\pi)^2]t} \sin(n\pi x)$$

en lösning till ekvationen som uppfyller randvillkoren. Eftersom vi vill ha

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x)$$

får vi **svar**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-[2+(n\pi)^2]t} \sin(n\pi x).$$

b. Fixera $t_0 > 0$ och låt $v(x) = u(x,t_0)$ för $0 < x < \pi$. Hur många gånger kontinuerligt deriverbar är funktionen v (motivera ditt svar väl)?

Lösning: Låt

$$w_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-[2+(n\pi)^2]t_0} \sin(n\pi x).$$

Observera att om $0 \leq m$ är ett heltal, så har vi uppskattningen

$$|w_n^{(m)}(x)| \leq \pi^m n^{m-2} e^{-[2+(n\pi)^2]t_0}.$$

Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^m n^{m-2} e^{-[2+(n\pi)^2]t_0} < \infty$$

så ger Weierstrass M-test slutsatsen att

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(m)}$$

konvergerar likformigt för alla icke-negativa heltal m. Följdaktligen är v m gånger kontinuerligt deriverbar för alla icke-negativa heltal m. **Svar:** v är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbar.

Uppgift 8 (6 poäng). Låt x vara en komplexvärd funktion (signal) på ett intervall $[a,b]$ där $a < b$ är reella tal. Låt $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ vara reella tal sådana att $t_0 = a$ och $t_n = b$, där $n \geq 2$ är ett heltal. Låt

$$x_{\text{approx}}(t) = \begin{cases} \alpha_1 & a \leq t \leq t_1, \\ \alpha_2 & t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & t_{n-1} < t \leq t_n, \end{cases}$$

där $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är komplexa tal. Hur skall $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ väljas så att energin av felet, d.v.s.

$$\int_a^b |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt,$$

blir så liten som möjligt?

Lösning: Låt

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \begin{cases} 1 & a \leq t \leq t_1, \\ 0 & t \notin [a, t_1], \end{cases} \\
\phi_2(t) &= \begin{cases} 1 & t_1 < t \leq t_2, \\ 0 & t \notin (t_1, t_2], \end{cases} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\phi_n(t) &= \begin{cases} 1 & t_{n-1} < t \leq t_n, \\ 0 & t \notin (t_{n-1}, t_n]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Definiera även en inre produkt $\langle f, g \rangle$ via

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Då är $\phi_1, \ldots, \phi_n$ en ortogonal uppsättning vektorer med avseende på denna inre produkt. Vidare kan x_{approx} skrivas

$$x_{\text{approx}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k.$$

För att minimera energin av felet skall vi välja α_k så att x_{approx} blir den ortogonala projektionen av x på det delrum som spänns upp av $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Med andra skall vi välja

$$\alpha_k = \frac{\langle x, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)dt.$$

Svar:

$$\alpha_k = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)dt,$$

$k = 1, \ldots, n$.