

Tentamen, Differentialekvationer och transformeringar II, del 2, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 17 december 2010, kl. 8:00–13:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*

Betyg: 19 poäng (inklusive bonus) ger garanterat betyg E, 24 poäng ger garanterat betyg D, 28 poäng ger garanterat betyg C, 31 poäng ger garanterat betyg B, 37 poäng ger garanterat betyg A. 17 poäng ger garanterat betyget Fx som berättigar till en kompletterande tentamen.

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för den första uppgiften).

Examinator: Hans Ringström.

Uppgift 1 (5 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall i detta problem anges utan motivering och på formen **sant** eller **falskt**):

- i. Låt $f(t) = |\sin t|$. Då är f en jämn funktion på $\mathbb{R}$.
- ii. Låt $f(t) = \sin^2 t$ och $a_n, n = 0, 1, \dots$, och $b_n, n = 1, 2, \dots$, vara de reella fourierkoefficienterna associerade med f . Då är antalet fourierkoefficienter som är skilda från noll oändligt.
- iii. Summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n$$

är Cesàrosummerbar och

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n = \frac{i+1}{2} \quad (C, 1).$$

- iv. Låt $A_n, n = 1, 2, \dots$, och $B_n, n = 1, 2, \dots$, vara definierade av

$$A_n(s) = \begin{cases} n - 1/2, & |s| < 1/(2n), \\ 0, & |s| > 1/(2n) \end{cases}$$

och

$$B_n(s) = \begin{cases} 1/n^2, & |s| < n/4, \\ 0, & |s| > n/4. \end{cases}$$

Låt, slutligen, $K_n, n = 1, 2, \dots$, vara definierad av $K_n = A_n + B_n$. Då är $K_n, n = 1, 2, \dots$, en positiv summationskärna på $\mathbb{R}$.

- v. Följande likhet gäller:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+t^2)e^{t^2} \sin nt \, dt = 0.$$

vi. Om f är en 2π -periodisk funktion sådan att $f(t) = t$ för $-\pi < t \leq \pi$ så är $f(7\pi/2) = \pi/2$.

vii. Följande likhet gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \sin(nt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} \sin[(2k+1)t].$$

viii. Om f är en 2π -periodisk funktion och $g(t) = f(2t)$ så är g en π -periodisk funktion.

ix. u är en lösning till

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, & 0 < x < 1, & \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 1, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

om och endast om w , definierad av $w(x, t) = u(x, t) - x$, är en lösning till

$$\begin{aligned} w_{xx} &= w_t, & 0 < x < 1, & \quad t > 0; \\ w(0, t) &= 0, & w(1, t) &= 0, & \quad t > 0; \\ w(x, 0) &= f(x) - x, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

x. Låt $V = L^2(I)$, där $I = [0, 1]$, med inre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Låt D_A bestå av de funktioner u i $C^1(I)$ sådana att $u(0) = u(1) = 0$. Låt, slutligen, för $u \in D_A$,

$$(Au)(x) = iu'(x).$$

Då är A en symmetrisk operator.

Uppgift 2 (5 poäng). Låt

$$y(t) = \begin{cases} \sin t & t > \pi, \\ 0 & t < \pi. \end{cases}$$

Beräkna y' och y'' (i distributionsmening), samt $y'' + y$. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

Uppgift 3 (5 poäng). a. Låt f vara den 2π -periodiska funktion sådan att $f(t) = |t| + \sin t$ för $-\pi < t \leq \pi$. Beräkna f 's reella fourierserie.

b. För vilka t är fourierserien konvergent? Till vad konvergerar fourierserien (när den är konvergent)?

c. Är serien likformigt konvergent (motivera ditt svar)?

Uppgift 4 (5 poäng). Finn lösningen till ekvationen $\Delta u = 0$ i området $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ som uppfyller randvillkoren $u(x, y) = 1 + x + y^2$ för $x^2 + y^2 = 1$. *OBS: Lösningen skall anges som en funktion av x och y .*

Uppgift 5 (5 poäng). a. Beräkna Z -transformen av talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ om $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

b. Beräkna $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

Uppgift 6 (5 poäng). a. Antag att $y(t) = e^{-t}H(t)$ och att $x(t) = e^t(1-H(t))$, där

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

är Heavisidefunktionen. Beräkna faltningen $x * y$ (resultatet skall ges som en explicit funktion av t som inte inbegriper några integraler). Faltningen ges här av

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds.$$

b. Ett idealt lågpassfilter fungerar så att det släpper igenom alla vinkelfrekvenser under en viss brytvinkelfrekvens och blockerar alla övriga vinkelfrekvenser. Antag nu att brytvinkelfrekvensen är 1. Om man skickar en insignal, säg y_{in} , genom ett sådant lågpassfilter, så blir utsignalen, benämnd y_{ut} , den inversa fouriertransformen av funktionen Y_{ut} , där Y_{ut} ges av

$$Y_{\text{ut}}(\omega) = [H(\omega + 1) - H(\omega - 1)]\hat{y}_{\text{in}}(\omega),$$

och $\hat{y}_{\text{in}}$ är fouriertransformen av y_{in} (H betecknar här Heavisidefunktionen). Givet att $y_{\text{in}} = e^{-t}H(t)$, vad blir den relativa energiförlusten, d.v.s., vad blir

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |y_{\text{in}}|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} |y_{\text{ut}}|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |y_{\text{in}}|^2 dt}?$$

Uppgift 7 (5 poäng). a. Lös

$$\begin{cases} u_t + 2u = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

där

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x).$$

b. Fixera $t_0 > 0$ och låt $v(x) = u(x, t_0)$ för $0 < x < \pi$. Hur många gånger kontinuerligt deriverbar är funktionen v (motivera ditt svar väl)?

Var god vänd!

Uppgift 8 (6 poäng). Låt x vara en komplexvärd funktion (signal) på ett intervall $[a, b]$ där $a < b$ är reella tal. Låt $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ vara reella tal sådana att $t_0 = a$ och $t_n = b$, där $n \geq 2$ är ett heltal. Låt

$$x_{\text{approx}}(t) = \begin{cases} \alpha_1 & a \leq t \leq t_1, \\ \alpha_2 & t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & t_{n-1} < t \leq t_n, \end{cases}$$

där $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ är komplexa tal. Hur skall $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ väljas så att energin av felet, d.v.s.

$$\int_a^b |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt,$$

blir så liten som möjligt?