

**Lösningsförslag, Tentamen, Differentialekvationer
och transformer II, del 2, för CTFYS2 och CMEDT3,
SF1629, den 9 juni 2011, kl. 8:00–13:00**

Uppgift 1(av 8) (5 poäng). Svar:

- i. sant,
- ii. falskt,
- iii. falskt,
- iv. sant,
- v. sant,
- vi. sant,
- vii. falskt,
- viii. sant,
- ix. sant,
- x. sant.

Uppgift 2(av 8) (5 poäng). Finn polynomet $p(x)$ av grad högst 1 som minimerar värdet av integralen

$$\int_0^\infty |x^2 - p(x)|^2 e^{-x} dx.$$

Lösningsförslag: För att passa ihop frågeställningen med den allmänna L^2 -teorin är det av intresse att observera att om vi introducerar den inre produkten

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

och låter $h(x) = x^2$, så kan vi skriva

$$\int_0^\infty |x^2 - p(x)|^2 e^{-x} dx = \|h - p\|^2,$$

där

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

I jämförelse med den allmänna teorin ges alltså det relevanta komplexa vektorrummet av $V = L^2(I, w)$, där $I = (0, \infty)$ och $w(x) = e^{-x}$. Låt W beteckna delrummet till V som består av polynom av grad högst 1. Då ger den allmänna

teorin slutsatsen att p är den ortogonala projektionen av h på W . Å andra sidan vet vi (t.ex. via boken) att en ortonormal bas för W ges av de två första Laguerrepolynomerna: $L_0(x) = 1$ och $L_1(x) = 1 - x$. Följdaktligen ges p av

$$p(x) = \langle h, L_0 \rangle L_0(x) + \langle h, L_1 \rangle L_1(x).$$

Eftersom

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

(enligt boken) får vi

$$\langle h, L_0 \rangle = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2!$$

samt

$$\langle h, L_1 \rangle = \int_0^\infty x^2(1-x)e^{-x} dx = 2! - 3! = -4.$$

Följdaktligen får vi

$$p(x) = 2 - 4(1-x) = -2 + 4x.$$

Svar:

$$p(x) = -2 + 4x.$$

Uppgift 3 (av 8) (5 poäng). a. Låt f vara den udda 2π -periodiska funktion som ges av $f(t) = 1 + t$ för $0 \leq t < \pi$. Beräkna f 's reella fourierserie.

Lösningsförslag: Eftersom f är udda behöver vi enbart beräkna

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1+t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n}(1+t) \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n(1+\pi)]. \end{aligned}$$

Svar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n(1+\pi)] \sin(nt).$$

b. För vilka t är fourierserien konvergent? Till vad konvergerar fourierserien (när den är konvergent)?

Lösningsförslag: Eftersom f är 2π -periodisk och har vänster- och högergränsvärden i varje punkt samt generaliserade vänster- och högerderivator i varje punkt så konvergerar serien i $t = t_0$ till

$$\frac{1}{2}[f(t_0+) + f(t_0-)]; \tag{1}$$

se Sats 4.5 i boken. Eftersom f är kontinuerlig i t_0 om t_0 inte är en heltalsmultipel av π och eftersom (1) är 0 om t_0 är en heltalsmultipel av π så får

vi **svar:** Fourierserien konvergerar för alla t . Om t inte är en heltalsmultipel av π konvergerar fourierserien till $f(t)$ och om t är en heltalsmultipel av π så konvergerar fourierserien till 0.

c. Är serien likformigt konvergent (motivera ditt svar)?

Lösningssförslag: Om serien vore likformigt konvergent så skulle den konvergera till en kontinuerlig funktion. Enligt b-delen vet vi att den inte konvergerar till en kontinuerlig funktion, varav vi får **svar:** Nej.

Uppgift 4 (av 8) (5 poäng). Lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & t > 0, \ x \in (-\infty, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

ges av

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/(4t)} f(x-y) dy$$

för $t > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (föresatt att f är en integrerbar funktion). Givet att

$$f(x) = e^{-(x-1)^2} + e^{-(x+1)^2},$$

beräkna $u(x, t)$ för $t > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (svaret får varken innehålla integraler eller faltningar).

Lösningssförslag: För $t > 0$ ges $u(x, t)$ (enligt problemformuleringen) av faltningen mellan

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \quad \text{och} \quad e^{-(x-1)^2} + e^{-(x+1)^2}.$$

Det är praktiskt att beräkna denna faltning genom att fouriertransformera båda dessa funktioner. Funktionen u kan sedan beräknas genom att inverstransformera produkten av fouriertransformerna. Enligt BETA (alternativt boken) kan man beräkna att fouriertransformen av

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$$

(där $t > 0$ skall betraktas som fixt) ges av

$$e^{-\omega^2 t}.$$

Fouriertransformen av e^{-x^2} ges, å andra sidan, av $\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$. Om vi använder oss av BETA igen, så får vi att fouriertransformen av $e^{-(x-1)^2}$ ges av

$$e^{-i\omega} \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

Analogt ges fouriertransformen av $e^{-(x+1)^2}$ av

$$e^{i\omega} \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

Fouriertransformen av u ges följaktligen (för ett fixt $t > 0$) av

$$e^{-\omega^2 t} (e^{-i\omega} \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} + e^{i\omega} \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2(t+1/4)} (e^{i\omega} + e^{-i\omega}).$$

Enligt vad vi redan har sagt följer att inverstransformen av $e^{-\omega^2(t+1/4)}$ ges av

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1/4)}} e^{-x^2/(4t+1)}.$$

Eftersom en faktorerar av på formen $e^{\pm i\omega}$ enbart svarar mot en förskjutning får vi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1/4)}} e^{-(x-1)^2/(4t+1)} + \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1/4)}} e^{-(x+1)^2/(4t+1)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4t+1}} (e^{-(x-1)^2/(4t+1)} + e^{-(x+1)^2/(4t+1)}). \end{aligned}$$

Svar:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} (e^{-(x-1)^2/(4t+1)} + e^{-(x+1)^2/(4t+1)}).$$

Uppgift 5(av 8) (5 poäng). Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n + 1, \\ b_{n+1} &= -2a_n + 4b_n \end{aligned}$$

för alla heltal $n \geq 0$, givet att $a_0 = b_0 = 0$

Lösningsförslag: Z -transformering av ekvationssystemet ger

$$\begin{aligned} zA(z) &= A(z) + B(z) + \frac{z}{z-1}, \\ zB(z) &= -2A(z) + 4B(z), \end{aligned}$$

där $A(z)$ betecknar Z -transformen av a_n och $B(z)$ betecknar Z -transformen av b_n . På matrisform ges detta system av

$$\begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 2 & z-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

varav

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{pmatrix} z-4 & 1 \\ -2 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ får vi (via en partialbråsuppdelning)

$$A(z) = \frac{z(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = -\frac{3}{2} \frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{z-2} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-3}.$$

Analogt får man

$$B(z) = \frac{-2z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = -\frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3}.$$

Inverstransformering ger **svar**:

$$a_n = -\frac{3}{2} + 2 \cdot 2^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n, \quad b_n = -1 + 2 \cdot 2^n - 3^n$$

för alla heltal $n \geq 0$.

Uppgift 6(av 8) (5 poäng). a. Beräkna lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{4} u_{tt}, & 0 < x < \pi, \quad t \in (-\infty, \infty), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \in (-\infty, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

där

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2} \sin(nx).$$

Lösningsförslag: Låt oss börja med att finna lösningar på produktform:

$$U(x, t) = X(x)T(t).$$

Ekvationen ger då

$$X''T = \frac{1}{4}XT''.$$

Om vi delar med XT får vi

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T}.$$

Eftersom vänsterledet enbart beror av x och högerledet enbart beror av t måste båda sidor vara konstanta. Kalla konstanten $-\lambda$. Detta ger de två ekvationerna

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{2}$$

$$T'' + 4\lambda T = 0. \tag{3}$$

Kombinationen av randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0$ och ekvationen (2) är bekant från boken, och vi får lösningarna

$$X_n(x) = \sin(nx)$$

för $n = 1, 2, \dots$. Motsvarande λ -värden ges av $\lambda_n = n^2$. Den allmänna lösningen till (3) med $\lambda_n = n^2$ ges av

$$T_n(t) = A_n \sin(2nt) + B_n \cos(2nt).$$

Via superpositionsprincipen är följaktligen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(2nt) + B_n \cos(2nt)] \sin(nx)$$

en lösning till ekvationen som uppfyller randvillkoren. Det återstår att välja A_n och B_n så att begynnelsevillkoren är uppfyllda. Observera att

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx).$$

Eftersom $u(x, 0) = f(x)$ (med f som ovan) måste vi alltså ha

$$B_n = \frac{1}{(1+n^2)^2}.$$

Observera att

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nA_n \sin(nx).$$

Eftersom vi vill ha $u_t(x, 0) = 0$ måste vi foljdaktligen välja $A_n = 0$. **Svar:**

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2} \cos(2nt) \sin(nx)$$

b. Låt $t_0 \in (-\infty, \infty)$ och $v(x) = u(x, t_0)$, där u är lösningen till problemet i a-delen. Är v kontinuerlig på $(0, \pi)$? Är v kontinuerligt deriverbar på $(0, \pi)$? Är v två gånger kontinuerligt deriverbar på $(0, \pi)$?

Lösningsförslag: Fixera t_0 . Låt $v(x) = u(x, t_0)$ och

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+n^2)^2} \cos(2nt_0) \sin(nx).$$

Observera att

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f''_n(x)$$

alla konvergerar likformigt; detta är en konsekvens av Weierstrass M -test, ty

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+n^2)^2}, \quad |f'_n(x)| \leq \frac{n}{(1+n^2)^2}, \quad |f''_n(x)| \leq \frac{n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Enligt extramaterialet om punktvis och likformig konvergens får vi därmed slutsatsen att v är två gånger kontinuerligt deriverbar. **Svar:** svaret på alla tre frågorna är ja.

Uppgift 7 (av 8) (5 poäng). Finn en kontinuerlig funktion u sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)[\phi''(t) + \phi(t)]dt = \phi(1)$$

för alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner ϕ med kompakt stöd (en funktion ϕ sägs ha kompakt stöd om det finns ett tal R sådant att $\phi(t) = 0$ för $|t| \geq R$).

Lösningsförslag: Observera att om vi definierar distributionen u_d via

$$u_d[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(t)dt$$

för kontinuerliga funktioner med kompakt stöd, så kan vänsterledet till ekvationen skrivas

$$(u_d'' + u_d)[\phi].$$

Vidare kan högerledet skrivas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\phi(t)dt.$$

Med andra ord kan ekvationen skrivas

$$u_d'' + u_d = \delta(t-1).$$

Låt oss beräkna en lösning till denna ekvation med hjälp av Laplacetransformen. Eftersom vi enbart behöver en lösning kan vi anta att initialdata för u_d är noll. Om vi betecknar Laplacetransformen av u_d med U_d får vi då ekvationen

$$s^2 U_d(s) + U_d(s) = e^{-s},$$

varav

$$U_d(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 1}.$$

Om vi inverstransformerar denna funktion får vi

$$\sin(t-1)H(t-1).$$

Det verkar alltså rimligt att välja

$$u(t) = \sin(t-1)H(t-1).$$

Det återstår att verifiera att denna funktion uppfyller den ursprungliga ekvationen. Låt oss beräkna

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi''(t)dt &= \int_1^{\infty} \sin(t-1)\phi''(t)dt \\ &= [\sin(t-1)\phi'(t)]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \cos(t-1)\phi'(t)dt \\ &= -[\cos(t-1)\phi(t)]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \sin(t-1)\phi(t)dt \\ &= \phi(1) - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Genom att flytta över den andra termen i högerledet till vänstersidan ser vi att u är en lösning till den ursprungliga ekvationen. **Svar:**

$$u(t) = \sin(t-1)H(t-1).$$

Uppgift 8(av 8) (6 poäng). a. Ett RC -lågpassfilter karakteriseras av en svarsfunktion h , vars fouriertransform ges av

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC},$$

där R är resistansen och C är kapacitansen i kretsen. Om x_{in} är insignalen till lågpassfiltret så ges utsignalen av $x_{\text{ut}} = h * x_{\text{in}}$, där fourierfaltungningen är definierad av

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds.$$

Antag nu att $RC = 1$ och att insignalen ges av

$$x_a(t) = \begin{cases} e^t & -a \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

där $a > 0$. Beräkna utsignalen $y_a = h * x_a$ (resultatet skall ges som en explicit funktion av t som inte innehåller några integraler).

Lösningsförslag: Det är praktiskt att beräkna faltningen med hjälp av fouriertransformen. Låt $\hat{x}_a$ och $\hat{y}_a$ beteckna fouriertransformen av x_a respektive y_a . Vi har

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x_a(t) dt = \int_{-a}^0 e^{t-i\omega t} dt = \left[\frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)t} \right]_{-a}^0 \\ &= \frac{1}{1-i\omega} (1 - e^{(i\omega-1)a}). \end{aligned}$$

Följdaktligen får vi

$$\hat{y}_a(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{x}_a(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} (1 - e^{(i\omega-1)a}).$$

Med hjälp av t.ex. BETA kan detta uttryck inverstransformeras, och vi får **svar:**

$$y_a(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} - \frac{1}{2} e^{-|t+a|-a}.$$

b. Signalen x_a i a-delen kan ses som en approximation till

$$x(t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0, \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

(signalen x_a kan tolkas så att man kopplar in spänningen vid $t = -a$ istället för vid $t = -\infty$). Låt y vara utsignalen svarande mot x , d.v.s., $y = h * x$. Vad blir energin av differensen $y - y_a$ som funktion av a ; d.v.s., vad blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_a(t)|^2 dt?$$

Lösningsförslag: Analogt med ovanstående kan man i detta fall beräkna att

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}, \quad \hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \quad y(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}.$$

Följdaktligen blir den eftersökta integralen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_a(t)|^2 dt &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t+a|-2a} dt = \frac{1}{4} e^{-2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-2a} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} e^{-2a} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4} e^{-2a}. \end{aligned}$$

Svar:

$$\frac{1}{4} e^{-2a}.$$

c. Hur skall a väljas för att vi skall få

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_a(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt} = \frac{1}{10} ? \quad (4)$$

Anmärkning: Likheten (4) motsvarar kriteriet att det relativa felet i utenergin skall vara 10%.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{4}.$$

Givet svaret i b-delen blir den relevanta ekvationen följaktligen

$$e^{-2a} = \frac{1}{10},$$

varav

$$-2a = -\ln 10.$$

Svar:

$$a = \frac{1}{2} \ln 10.$$