

Tentamen, Differentialekvationer och transformer II, del 2, för CTFYS2 och CMEDT3, SF1629, den 9 juni 2011, kl. 8:00–13:00

Hjälpmedel: Det enda tillåtna hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen BETA, Mathematics handbook. *Miniräknare är ej tillåten.*

Betyg: 19 poäng (inklusive bonus) ger garanterat betyg E, 24 poäng ger garanterat betyg D, 28 poäng ger garanterat betyg C, 31 poäng ger garanterat betyg B, 37 poäng ger garanterat betyg A. 17 poäng ger garanterat betyget Fx som berättigar till en kompletterande tentamen.

OBS: För full poäng krävs en fullständig motivering (med undantag för den första uppgiften).

Examinator: Hans Ringström.

Uppgift 1(av 8) (5 poäng). Är följande påståenden sanna eller falska (svaren skall i detta problem anges utan motivering och på formen **sant** eller **falskt**):

- i. Summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^n}$$

konvergerar punktvis för alla $t \in \mathbb{R}$ och funktionen s , definierad av

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^n},$$

är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$.

- ii. Låt funktionerna s_n , $n = 1, 2, \dots$, vara definierade av $s_n(t) = t^n$. Det finns en funktion s , definierad på intervallet $[0, 1]$, sådan att följderna av funktioner s_n , $n = 1, 2, \dots$, konvergerar likformigt mot s på $[0, 1]$.

- iii. Låt K_n , $n = 1, 2, \dots$, vara definierade av

$$K_n(s) = \begin{cases} n/2, & |s| < 1/(4n), \\ 0, & |s| > 1/(4n). \end{cases}$$

Då är K_n , $n = 1, 2, \dots$, en positiv summationskärna på $\mathbb{R}$.

- iv. Om f är en kontinuerlig 2π -periodisk funktion sådan att alla dess fourierkoefficienter c_n , $n \in \mathbb{Z}$, uppfyller $c_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, så är $f = 0$.

- v. Låt f vara definierad av egenskaperna att den är 2π -periodisk, sådan att $f(t) = 1$ för $0 < t \leq \pi$ och sådan att $f(t) = 0$ för $-\pi < t \leq 0$. Låt, vidare, c_n vara f :s fourierkoefficienter. Då

$$\frac{1}{2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n.$$

- vi. Låt $\langle z, w \rangle = z\bar{w}$ för $z, w \in \mathbb{C}$ (där $\bar{w}$ betecknar komplexkonjugatet av w). Då är $\langle z, w \rangle$ en inre produkt på det komplexa vektorrummet $\mathbb{C}$.
- vii. Låt V vara det komplexa vektorrummet bestående av de komplexvärda kontinuerliga funktionerna på det slutna intervallet $[-1, 1]$. Låt den inre produkten $\langle f, g \rangle$ på V vara definierad av

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Låt funktionerna f_1 och f_2 vara definierade av $f_1(t) = 1$ och $f_2(t) = t^2$. Då är f_1 och f_2 ortogonala med avseende på den inre produkten.

- viii. Följande likhet gäller:

$$\int_1^{1+2\pi} \sin^{28}(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^{28}(t) dt.$$

- ix. Låt $I = [0, 1]$. Då utgör ekvationen

$$u'' + \lambda u = 0$$

tillsammans med randvillkoren

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0$$

ett reguljärt Sturm-Liouville problem.

- x. Låt $V = L^2(I)$, där $I = [0, 1]$, med inre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Låt D_A bestå av de funktioner u i $C^2(I)$ sådana att $u(0) = u(1) = 0$. Låt, slutligen, för $u \in D_A$,

$$(Au)(x) = u''(x).$$

Då är A en symmetrisk operator.

Uppgift 2(av 8) (5 poäng). Finn polynomet $p(x)$ av grad högst 1 som minimerar värdet av integralen

$$\int_0^\infty |x^2 - p(x)|^2 e^{-x} dx.$$

Uppgift 3(av 8) (5 poäng). a. Låt f vara den udda 2π -periodiska funktion som ges av $f(t) = 1 + t$ för $0 \leq t < \pi$. Beräkna f 's reella fourierserie.

b. För vilka t är fourierserien konvergent? Till vad konvergerar fourierserien (när den är konvergent)?

c. Är serien likformigt konvergent (motivera ditt svar)?

Uppgift 4(av 8) (5 poäng). Lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} & t > 0, \ x \in (-\infty, \infty), \\u(x, 0) &= f(x) & x \in (-\infty, \infty)\end{aligned}$$

ges av

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/(4t)} f(x-y) dy$$

för $t > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (förutsatt att f är en integrerbar funktion). Givet att

$$f(x) = e^{-(x-1)^2} + e^{-(x+1)^2},$$

beräkna $u(x, t)$ för $t > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (svaret får varken innehålla integraler eller faltningar).

Uppgift 5(av 8) (5 poäng). Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + b_n + 1, \\b_{n+1} &= -2a_n + 4b_n\end{aligned}$$

för alla heltal $n \geq 0$, givet att $a_0 = b_0 = 0$

Uppgift 6(av 8) (5 poäng). a. Beräkna lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \frac{1}{4}u_{tt}, & 0 < x < \pi, \ t \in (-\infty, \infty), \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \in (-\infty, \infty), \\u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < \pi, \\u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi,\end{aligned}$$

där

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2} \sin(nx).$$

b. Låt $t_0 \in (-\infty, \infty)$ och $v(x) = u(x, t_0)$, där u är lösningen till problemet i a-delen. Är v kontinuerlig på $(0, \pi)$? Är v kontinuerligt deriverbar på $(0, \pi)$? Är v två gånger kontinuerligt deriverbar på $(0, \pi)$?

Uppgift 7(av 8) (5 poäng). Finn en kontinuerlig funktion u sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)[\phi''(t) + \phi(t)]dt = \phi(1)$$

för alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner ϕ med kompakt stöd (en funktion ϕ sägs ha kompakt stöd om det finns ett tal R sådant att $\phi(t) = 0$ för $|t| \geq R$).

Uppgift 8(av 8) (6 poäng). **a.** Ett RC -lågpassfilter karakteriseras av en svarsfunktion h , vars fouriertransform ges av

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC},$$

där R är resistansen och C är kapacitansen i kretsen. Om x_{in} är insignalen till lågpassfiltret så ges utsignalen av $x_{\text{ut}} = h * x_{\text{in}}$, där fourierfältningen är definierad av

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds.$$

Antag nu att $RC = 1$ och att insignalen ges av

$$x_a(t) = \begin{cases} e^t & -a \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

där $a > 0$. Beräkna utsignalen $y_a = h * x_a$ (resultatet skall ges som en explicit funktion av t som inte innehåller några integraler).

b. Signalen x_a i a-delen kan ses som en approximation till

$$x(t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0, \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

(signalen x_a kan tolkas så att man kopplar in spänningen vid $t = -a$ istället för vid $t = -\infty$). Låt y vara utsignalen svarande mot x , d.v.s., $y = h * x$. Vad blir energin av differensen $y - y_a$ som funktion av a ; d.v.s., vad blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_a(t)|^2 dt?$$

c. Hur skall a väljas för att vi skall få

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_a(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt} = \frac{1}{10}? \quad (1)$$

Anmärkning: Likheten (1) motsvarar kriteriet att det relativa felet i utenergin skall vara 10%.