Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2012-12-11, kl. 14:00-19:00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 2 delar: Del A som ger enbart godkänd, samt Del B för högre betyg.
Del A: *Består av 5 uppgifter, á 3 poäng. För betyg Godkänd (=E) krävs det att studenten har minst 11 poäng från Del A.*
Del B: *består av 4 uppgifter, där varje uppgift har 5 poäng (total 20). Dessutom måste man ha godkänd på A delen av skrivningen. Godkänd projekt ersätter sista uppgiften och ger maximalt 7 poäng.*

Redan godkända inlämningsuppgifter/KS ersätter uppgifterna på A delen enligt:
Godkänd Inlämningsuppgift I ersätter uppgift 1 på tentamen,
Godkänd Kontrollskrivning ersätter uppgift 2 på tentamen,
Godkänd Inlämningsuppgift II ersätter uppgift 3 på tentamen.

Betygskala:
A= minst 17 poäng från Del B samt A delen, *B= minst 13 poäng från Del B samt A delen,*
C= minst 9 poäng från Del B samt A delen, *D= minst 6 poäng från Del B samt A delen,*
E= minst 11 poäng från Del A, *Fx= minst 9 poäng från Del A.*

Total möjliga poäng är 37: Del A = 15p, Del B = 20, Del B + projekt = 22

Del A:

A1) Låt

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

a) Visa att $K_n(x) := nK(nx)$ är en positiv summationskärna (motivera ordentligt). (1p)

b) För varje deriverbar funktion f bestäm värdet (2p)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n} K_n'(x) f(x)dx.$$

A2) Låt $f(x) = x^3$. Betrakta vektorrummet $V = L^2_w(0,\infty)$ med vikten $w(x) = e^{-x}$. Låt vidare $\mathcal{P}_2$ vara det delrum i V som består av alla polynom av grad mindre eller lika med 2.

- Bestäm en orthonormal bas för $\mathcal{P}_2$ i V. (1p)
- Bestäm projektionen av $f(x)$ i $\mathcal{P}_2$. (1p)
- Hur bestäms (minsta) avståndet mellan f och $\mathcal{P}_2$ i rummet V (ingen beräkning behövs, enbart formel räcker)? (1p)

A3) Låt $g(t) = 1/(t^2+1)$. Låt vidare $f_a(t) = f(t-a)$ för varje funktion f. Bestäm funktionen f då f ges av relationen (3p)

$$f_2' \star g_{(-2)} = g' \star g.$$

A4) Bestäm alla lösningar till Sturm-Liouville problemet (3p)

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) - y(1) = 0, \\ y'(0) + y'(1) = 0. \end{cases}$$

A5:a) Definiera begreppet tempererade distribution utifrån kursboken. (1p)

A5:b) Visa att $(x-a)^2\delta_a'' = 2\delta_a$, för $a \in \mathbf{R}$. (2p)

V.G.V.

Del B:

B1:a) Utveckla funktionen $f(t) = 1 - |t|$ för $|t| \leq 1$ i Fourierserie med period 2. (2p)

B1:b) Använd resultatet i uppgift (B1:a) för att beräkna summorna (1+2 p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\ .$$

B2) Bestäm en lösning till Dirichlet problemet (5p)

$$\Delta u = 0 \quad \text{i } D, \qquad u(x,y) = x^4 + y^4 + x^3 + xy^3 + 1 \quad \text{på } \partial D,$$

där $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 < 1\}$ är enhetsskivan och $\partial D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 = 1\}$ randen till skivan.

B3) Bestäm en lösning till ekvationen (5p)

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta''(t+1).$$

B4a) Låt $f(x) = \log|x|$. Det är bekant att f är en distribution. Genom uträkning bestäm f' i distributionsmening. (3p)

B4b) Genom uträkning bestäm f'' i distributionsmening. (2p)

I båda fallen motivera ditt svar ordentilgt.

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, 2012-12-11, 13.00–19.00

A1) Se uppgift 2 i tentamen: SF1629 Del 2, 2008-12-19.
De tre villkoren för positiva kärnor är $K_n \geq 0$, $\int_{-a}^{a} K_n = 1$, samt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|s|<a} K_n = 0, \qquad \forall \delta > 0.$$

Beräkning ger att all tre villkoren är uppfyllda därför enligt definition är den en kärna. Partiellintegration och det faktum att $K(\pm 1/n) = 0$ ger att integralen blir lika med

$$\int_{-1/n}^{1/n} K_n'(x) f(x) dx = -\int_{-1/n}^{1/n} K_n(x) f'(x) dx = -\int_{-1/n}^{1/n} K_n(x) f'(x) dx \to -f'(0),$$

då K_n är en positiv kärna.

A2) Se exempel 5.13 (sidan 128) i textbooken.
En bas ges av $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - x$, $L_2 = 1 - 2x + x^2/2$.
Projektionen är $p(x) = 6 - 18x + 9x^2$.
Minsta avståndet blir då

$$\int_0^\infty |x^3 - p(x)| e^{-x} dx.$$

A3) Fouriertransformera

$$\mathcal{F}(f_2' \star g_{(-2)}) = \mathcal{F}(g' \star g) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f_2')\mathcal{F}(g_{-2}) = \mathcal{F}(g')\mathcal{F}(g)$$

detta ger

$$\left(i\omega e^{-2i\omega} \hat{f}\right)\left(\hat{g} e^{2i\omega}\right) = i\omega \hat{g}\hat{g} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}\hat{g} = \hat{g}\hat{g} \quad \Rightarrow \quad \hat{f} = \hat{g}.$$

Det sista steget följer då vi kan dela med $\hat{g}$ båda leden eftersom $\hat{g} \neq 0$. Nu följer det av entydighetsatsen att $f = g$. Svar $f = 1/(1 + t^2)$.

A4) Vi tar 3 olika fall.
$\lambda = \mathbf{0}$: ger lösingen $y = at + b$ och med randvärdet får vi att $a = 0$. Dvs lösningen är en konstant.
$\lambda > \mathbf{0}$: Sätt $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. Vi har då lösningen $y = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$. Insättning av randvärden ger

$$a = a\cos(\omega) + b\sin(\omega), \qquad b = a\sin(\omega) - b\cos(\omega)$$

som ger $a + b = (a - b)\cos\omega + (a + b)\sin\omega$. Då $a + b = 0$ men $(a - b) \neq 0$ har vi att $\cos\omega = 0$ dvs $\omega = \pi/2 + k\pi$ för all heltal $k > 0$ (eftersom $\omega > 0$). Om $a + b \neq 0$ men $(a - b) = 0$ får vi samma resultat. Om både $a + b \neq 0$ och $(a - b) \neq 0$ kan vi dela med $a + b$ och få $1 = A\cos\omega + \sin\omega$ där $A = (a-b)/(a+b)$. Vi ser att för varje val av ω sådant att $\cos\omega \neq 0$ kan vi välja $A = (1 - \sin\omega)/\cos\omega$ och då är denna ekvation lösbar. Detta ger oss att för all $\omega \neq \pi/2 + k\pi$ kan vi lösa detta. Men vi såg att även för $\omega = \pi/2 + k\pi$ hade vi lösning under valet $a + b = 0$ men $(a - b) \neq 0$ (ovan). Därmed har ekvationen lösning för alla $\lambda \geq 0$.

$\lambda < \mathbf{0}$: Sätt $\omega = -\sqrt{-\lambda} < 0$. Och lösningen ges då av $y = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$. Man kan med samma metod som ovan komma fram till att $A = a/b = e^{-\omega}$ med valet $b \neq 0$. Dvs vi får även i detta fall lösningar för alla val av $\lambda < 0$.

SVAR: För alla $\lambda \in \mathbf{R}$ har ekvationen en lösning.

A5a) Se textboken.

A5b) Jämför övning i textboken. Om vi sätter $y = x - a$ så ändras ekvationen till $y^2\delta'' = 2\delta'$. Vi har då

$$(y^2\delta'')(\phi) = \delta((y^2\phi)'') = \delta(2\phi + y(ngt\ uttryck)) = 2\phi(0) + 0(ngt\ uttryck) = 2\delta(\phi)$$

eftersom $y\delta = 0$. Dvs $y^2\delta'' = 2\delta$ i distributionsmening.

B1) Låt $f(t) = 1 - |t|$ på den givna intervallet och att den är periodisk för övrigt. Vi har att

$$\text{F-Serien}(f) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos((2n+1)\pi t).$$

För $t = 0$ är serien konvergent och lika med funktionen i den punkten, eftersom f är kontinuerlig och har höger och vänster derivator i $t = 0$. Därför

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Parsevals formel ger

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum(a_n^2 + b_n^2) = \|f\|_{L^2}.$$

Vi ser att med valet $< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \bar{f}g$ blir detta ett inreprodukt som ger att $e^{in\pi t}$ är komplett (Sats 5.8 i boken). Därför kan vi tillämpa Parseval för detta med F-koefficenterna som ovan (observera att f är en jämn funktion därför är $b_n = 0$.) dvs

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^2}{(2n+1)^4\pi^4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f|^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

B2) Vi kan skriva om randvärden då $x^2 + y^2 = 1$ på randen

$$x^4+y^4+x^3+xy^3+1 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^3+xy^3+1 = 1-2x^2y^2+x^3+xy^3+1 = 2-2x^2y^2+xy^3+x^3.$$

Pga linjäritet kan vi då lösa ekvationen för olika randvärden 2, $-2x^2y^2$,xy^3, samt x^3. Den första randvärdet $g = 2$ är jo själv harmonisk i D, därför väljer vi $u_1 = 2$. För de övriga randvärden går vi över till polära koordinater: För $-2x^2y^2$ får vi att $-2x^2y^2 = -2r^4 \cos^2 t \sin^2 t$, med $r = 1$ och lite trigonometri får vi detta till $(\cos 4t - 1)/4$. Därför en lösning för detta randvillkor ges av

$$u_2 = \frac{r^4 \cos 4t}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(Real(re^{it})^4 - 1) = \frac{1}{4}(Real(x+iy)^4 - 1) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 1).$$

Randvillkoret xy^3 blir $\cos t \sin^3 t$ (då $r = 1$). Det kan skrivas om till $(\sin 2t - \sin 4t/2)/4$. Därför en lösning blir

$$u_3 = \frac{r^2 \sin 2t}{4} - \frac{r^4 \sin 4t}{8} = \frac{1}{4}Imagin(r^2e^{2it}) - \frac{1}{8}Imagin(r^4e^{4it}) = \frac{1}{4}Imagin(z^2) - \frac{1}{8}Imagin(z^4)$$

som ger

$$u_3 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}xy(x^2 - y^2)$$

För randvillkoret x^3 får vi $\cos^3 t = 3\cos t/4 + \cos 3t/4$ som ger lösningen

$$u_4 = \frac{3}{4}r\cos t + \frac{1}{4}r^3 \cos 3t = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}Real(z^3) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\left(x(x^2 - y^2) - 2xy^2\right)$$

Summerar vi lösningar får vi då

$$u = 2 + \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 1) + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}xy(x^2 - y^2) + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\left(x(x^2 - y^2) - 2xy^2\right).$$

Inte lätt att kolla svaret! Man kan prova med 4 enkla värden på cirkeln: $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$, och de stämmer.

B3) Fouriertransformera båda leden:

$$(i\omega)^2\hat{y} + i\omega\hat{y} - 2\hat{y} = (i\omega)^2 e^{i\omega},$$

detta ger

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \tfrac{1}{(i\omega-1)(i\omega+2)}((i\omega)^2 e^{i\omega}) \\ &= -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{1-i\omega} + \tfrac{1}{2+i\omega}\right)((i\omega)^2 e^{i\omega}) = -\tfrac{(i\omega)^2 e^{i\omega}}{3}(\hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)), \end{aligned}$$

där
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega}, \qquad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega}.$$
Vi har då enligt tabell att $g(t) = e^t(1 - H(t))$ och $h(t) = e^{-2t}H(t)$. Vidare gäller det att
$$\hat{y} = -\frac{(i\omega)^2 e^{i\omega}}{3}(\hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)) = -\frac{1}{3}(\mathcal{F}\{g''(t+1)\}(\omega) + \mathcal{F}\{h''(t+1)\}(\omega)),$$
så inverstransformering, samt användning av
$$g'(t) = e^t(1 - H(t)) - \delta(t) \Rightarrow g''(t) = e^t(1 - H(t)) - \delta(t) - \delta'(t)$$
och
$$h'(t) = -2e^{-2t}H(t) + \delta(t) \Rightarrow h''(t) = 4e^{-2t}H(t) - 2\delta(t) + \delta'(t),$$
ger slutligen
$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{t+1}(1 - H(t+1)) - \frac{4}{3}e^{-2(t+1)}H(t+1) + \delta(t+1).$$

B4a) Eftersom den "vanliga" derivatan $1/x$ inte är en distribution, så kan vi INTE påstå att derivatan av $\ln|x|$ är $1/x$. Vi bör använda oss av definitionen
$$(\ln|x|)'(\varphi) = -(\ln|x|)(\varphi) = -\int \varphi'(x)\ln|x|.$$
Partiellintegrationen leder ingenstans, eftersom $1/x$ inte är integrerbar kring $x = 0$. Vi använder oss av följande
$$(\ln|x|)'(\varphi) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\varphi'(x)\ln|x| = -\lim_{\epsilon\to 0}[\varphi(x)\ln|x|]_{x=\epsilon}^{x=\infty} - \lim_{\epsilon\to 0}[\varphi(x)\ln|x|]_{x=-\infty}^{x=-\epsilon}$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x} = (P.V.(\frac{1}{x}))(\varphi).$$
Dvs
$$\frac{d\ln|x|}{dx} = P.V.(\frac{1}{x})$$
i distributionsmening.

B4b) Se föreläsningsanteckningar.