KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1204, DISKRET MATEMATIK för D
Torsdagen den 31 mars 2005

Skrivtid: 14.00 – 19.00
Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Inga hjälpmedel tillåtna, inte ens räknedosa.

Betygsgränser (preliminära): 25 poäng ger betyg 3, 33 poäng ger betyg 4 och 42 poäng ger betyg 5.
Slutbetyget på kursen bestäms av betyget på skrivningen och betyget på uppsatsen.

Teoridel

Den som vt 2005 blivit godkänd på lappskrivning nr i får automatiskt 4 poäng på uppgift nr i (i=1,2,3,4,5) och skall inte göra den uppgiften.
Ange på skrivningsomslaget vilka lappskrivningar du klarat.

1a) (1p) Talföljden $a_n = n \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ är en lösning till den linjära rekursionsekvationen $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n + (4-3n)2^n$ (behöver inte visas). Ange den allmänna lösningen till ekvationen.
b) (1p) Vad menas med en **isomorfi** mellan två grafer?
c) (2p) Vad menas med en **hörnfärgning** (eng. vertex colouring) av en graf $G = (V, E)$? Beskriv en **girig algoritm** (eng. greedy algorithm) för att hörnfärga en given graf med få färger.

2a) (2p) Vad menas med en **kantfärgning** (eng. edge colouring) av en graf? Vad är det minimala antalet färger i en kantfärgning av en **bipartit** graf?
b) (2p) Vad menas med en **största gemensam delare** (eng. greatest common divisor) till heltalen x, y? Beskriv kortfattat en algoritm för att finna en sådan.

3a) (1p) Vad menas med att funktionen $f : X \to Y$ är en **injektion**?
b) (1p) Vad menas med att en mängd S är **uppräknelig** (eng. countable)?
c) (2p) På hur många sätt kan n olika kulor fördelas i k olika lådor, med n_i kulor i låda i, $\sum_i n_i = n$? (Svaret får innehålla fakulteter och de fyra räknesätten.)

4a) (1p) För $n \in \mathbb{N}$ är $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$, där μ är möbiusfunktionen. Vad är $f(n)$, uttryckt i g:s värden?
b) (1p) Är $2372819 \cdot 6192458 = 14694581999102$? Motivera ditt svar!
c) (2p) Ekvationssystemet $x \equiv_{11} 1$, $x \equiv_{13} 1$, $x \equiv_{15} 3$ har lösningen $x = 2718$. Finn alla (heltals-)lösningar.

5a) (1p) Om H är en delgrupp (eng. subgroup) till gruppen G, vad menas med en **högersidoklass** (eng. right coset) till H i G?
b) (2p) Låt gruppen G verka på mängden X och $x \in X$. Vad menas med **banan** (eng. orbit) och **stabilisatorn** (eng. stabilizer) för x under G:s verkan? Vilket samband råder mellan dessas storlek och G:s ordning om G är ändlig?
c) (1p) Ange för var och en av följande om den är en **kropp** (eng. field): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{10}$. (Våra vanliga beteckningar.)

Vänd!

Problemdel

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

6a) (2p) En linjär, binär kod ges av kontrollmatrisen (eng. check matrix)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vilka ord har sänts om (100001), (010110) och (111110) har mottagits och högst ett fel har uppstått?

b) (2p) Hur många olika ord innehåller koden i **a)**?

c) (2p) För RSA-kryptering vill man ta $n = 1147, e = 271$ som offentlig nyckel. Hur många meddelanden krypteras då som sig själva, dvs för hur många heltal x, $0 \leq x \leq 1146$, gäller $E(x) = x$? $[1147 = 31 \cdot 37]$.

7a) (2p) Under ett 34 dagar långt skollov skall 13 olika museer besökas. Varje museum ägnas precis en dag. På hur många sätt kan besöken fördelas?

b) (2p) Hur många sätt är möjliga om man aldrig har två museidagar i rad?

c) (2p) Permutationen $\alpha \in S_9$ ges av $\alpha(1) = 7, \alpha(2) = 5, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 1, \alpha(5) = 9, \alpha(6) = 8, \alpha(7) = 4, \alpha(8) = 6, \alpha(9) = 3$.
Hur många $\beta \in S_9$ uppfyller $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$?
[Svaren får innehålla fakulteter, potenser och de fyra räknesätten.]

8a) (2p) Vad blir resten då $31^{3^{2005}}$ (dvs $31^{(3^{2005})}$)divideras med 13?

b) (2p) Visa att för alla heltal n är $13n^{19} + 19n^{13} + 215n$ delbart med 247.

c) (2p) Visa att $n \in \mathbb{N}$ uppfyller $\prod_{d|n} d = n^2$ om och endast om n är $1, p^3$ eller pq, för olika primtal p, q. ($\prod_{d|n} d$ är produkten av alla positiva delare till n.)

9a) (2p) Avgör (med motivering) i vart och ett av fallen i), ii) och iii) om det finns någon graf med sju hörn med valenser:
i) $0, 2, 3, 3, 4, 4, 5$, ii) $2, 3, 3, 3, 3, 3, 3$, iii) $2, 2, 3, 5, 5, 5, 6$.
(Liksom i kursboken betraktar vi bara grafer utan loopar och multipla kanter.)

b) (2p) Visa att en (ändlig) graf där varje hörn har valens (eng. degree) minst 2 innehåller en cykel.

c) (2p) I en sammanhängande plan graf har alla hörn valens (eng. degree) 3 eller 5 och alla ytor utom ytan ”utanför” grafen har 4 kanter. Hur många hörn har valens 5 och hur många ytor med 4 kanter finns det, om 13 av hörnen har valens 3 och den ”yttre” ytan har 6 kanter?

10a) (2p) Bestäm den monadiska (dvs högstagradskoefficienten = 1) största gemensamma delaren (eng. greatest common divisor) $r(x)$ till polynomen $p(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 3$ och $q(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 2$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) (2p) Visa att $g(x) = x^2 + 1$ är irreducibelt i $\mathbb{Z}_3[x]$ och finn ett primitivt element i den ändliga kropp som kan konstrueras med $\mathbb{Z}_3[x]$ och $g(x)$.

c) (2p) Var och en av de fem sidoytorna (två liksidiga trianglar och tre kvadrater) på en kloss i form av ett triangulärt prisma skall ges en av k färger. Hur många väsentligt olika (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider dem i rummet) färgningar finns det?

Lycka till!

Lösningar läggs ut på kurssidan efter skrivningens slut.
Där meddelas också när tentan och uppsatsen är rättade.